7. *Die Wärmestrahlung der Metalle;* *von E. Aschkinass.*

Die spektrale Verteilung der von einem absolut schwarzen Körper ausgestrahlten Energie läßt sich in Übereinstimmung mit der Erfahrung durch die von Hrn. Planck[1]) auf theoretischem Wege abgeleitete Formel

$$E = c_1 \lambda^{-5} \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)^{-1} \tag{1}$$

darstellen, in welcher E die Intensität der Strahlung von der Wellenlänge λ und der absoluten Temperatur T bedeutet; c_1 und c_2 sind dabei konstante Größen, von denen c_2 den Wert 14600 besitzt, wenn, wie es geschehen soll, $1\,\mu$ als Maßeinheit der Wellenlänge benutzt wird. Aus der Planckschen Formel ergeben sich ohne weiteres die drei Grundgesetze der schwarzen Strahlung, nämlich, indem wir mit λ_m die Wellenlänge des der Temperatur T entsprechenden Energiemaximums E_m bezeichnen, erstens das Verschiebungsgesetz:

$$\lambda_m T = \text{const.} = \frac{c_2}{4{,}9651} = 2940, \tag{2}$$

ferner die Beziehung

$$E_m = \text{const.} \,.\, T^5 \tag{3}$$

und schließlich das Stefan-Boltzmannsche Gesetz der Gesamtstrahlung

$$\int_0^\infty E \, d\lambda = \text{const.} \,.\, T^4 . \tag{4}$$

Haben wir es nun mit einem *nicht* schwarzen Körper zu tun, so wird von diesem bei der Wellenlänge λ und der Temperatur T eine Strahlung S ausgesandt, die außer von λ und T auch noch von seinem Reflexionsvermögen abhängt, im übrigen aber von keiner weiteren Größe, sofern wir die Festsetzung treffen — und dies möge im folgenden stets vorausgesetzt werden —, daß die Schichtdicke der emittierenden

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 4. p. 553. 1901.

Substanz genügend groß sei, um von den in Betracht kommenden Strahlen keinen merklichen Bruchteil hindurchzulassen. Bezeichnen wir dann mit R das prozentische Reflexionsvermögen des betreffenden Körpers für Strahlen der Wellenlänge λ, so ist nach dem Kirchhoffschen Satze

$$(5) \qquad S = \frac{100 - R}{100} E = c_1 \frac{100 - R}{100} \lambda^{-5} \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)^{-1}.$$

Hierin ist R eine im allgemeinen unregelmäßige Funktion von λ und T; infolgedessen erscheint es ausgeschlossen, daß für die Strahlung eines nicht schwarzen Körpers *allgemein* gültige Gesetze von der Art der durch Gleichung (2) bis (4) dargestellten Beziehungen bestehen.

Von zuverlässigen Beobachtungen über die Strahlung gewöhnlicher Körper liegt bisher nur ein spärliches Material vor. Am gründlichsten ist die Emission des Platins untersucht worden. Lummer und Kurlbaum bez. Lummer und Pringsheim fanden, daß für dieses Metall innerhalb eines ziemlich weiten Wellenlängen- und Temperaturbereiches, ähnlich wie für den absolut schwarzen Körper, einfache Beziehungen der Größen λ_m, S_m und $\int_0^\infty S\,d\lambda$ zur absoluten Temperatur zutage treten. Daraus kann man bereits entnehmen, daß die funktionelle Abhängigkeit des Reflexionsvermögens des Platins von λ und T innerhalb jener Gültigkeitsgrenzen eine *einfache* Gestalt besitzen muß.

Im folgenden möge nun gezeigt werden, daß sich aus bereits vorliegenden Kenntnissen Strahlungsgesetze von beschränkter Gültigkeit für alle Metalle ableiten lassen.

Aus den Untersuchungen von Hagen und Rubens[1]) hat sich eine einfache Beziehung zwischen der elektrischen Leitungsfähigkeit der Metalle und ihrem Reflexionsvermögen für Strahlen relativ großer Wellenlänge ergeben, eine Gesetzmäßigkeit, zu welcher auch, wie die Herren Drude u. Planck gezeigt haben[2]),

---

1) E. Hagen und H. Rubens, Ann. d. Phys. **11.** p. 873. 1903.

2) P. Drude, Physik des Äthers p. 574. 1894; Verh. d. Deutschen Physik. Gesellsch. **5.** p. 142. 1903; M. Planck, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1903. p. 278; vgl. auch E. Cohn, Das elektromagnetische Feld p. 444. 1900.

die Maxwellsche elektromagnetische Theorie des Lichtes führt. Nach den eben genannten Autoren ist nämlich

$$100 - R = \frac{36{,}5}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{w}, \tag{6}$$

worin w den spezifischen Ohmschen Widerstand des betreffenden Metalles bedeutet. Betrachten wir nun die Strahlung S eines solchen Metalles lediglich in dem Gebiete des langwelligen Spektrums, in welchem die Gleichung (6) erfüllt wird, so erhalten wir aus (5) und (6) den Ausdruck

$$S = \frac{0{,}365}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{w}\, E,$$

also

$$S = c_1 \,.\, 0{,}365 \sqrt{w}\, \lambda^{-5{,}5} \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1\right)^{-1}. \tag{7}$$

Hierin ist w natürlich noch eine Funktion von T.

Beschränken wir unsere Betrachtung ferner auf so tiefe Temperaturen, daß das Energiemaximum S_m selbst noch innerhalb des Gültigkeitsbereiches der Gleichung (6) fällt, so erhalten wir die spektrale Lage von S_m, indem wir in üblicher Weise $\partial S / \partial \lambda = 0$ setzen, wobei ja die Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur nicht in Frage kommt. Es ergibt sich dann zunächst die transzendente Gleichung

$$e^{\frac{c_2}{\lambda_m T}} \left(1 - \frac{c_2}{5{,}5\, \lambda_m T}\right) = 1.$$

Als Lösung dieser Gleichung findet man

$$\frac{c_2}{\lambda_m T} = 5{,}4770;$$

folglich ist

$$\lambda_m T = \frac{14600}{5{,}4770},$$

also

$$\lambda_m T = 2666. \tag{8}$$

Es ergibt sich demnach, daß bei tiefen Temperaturen auch die Metalle ein dem Wienschen analoges Verschiebungsgesetz befolgen, indem das Produkt aus der Wellenlänge des Energiemaximums und der absoluten Temperatur hier gleichfalls eine Konstante darstellt. Während aber der Wert dieser Konstanten für den absolut schwarzen Körper 2940 beträgt,

ist er für die Metalle 2666, so daß bei gleichen Temperaturen das Energiemaximum für die letzteren bei kürzeren Wellen liegt als für den schwarzen Körper. (Das Verhältnis der λ_m für Metalle zu derjenigen für den schwarzen Körper ist gleich 0,91.)

Aus dem Verschiebungsgesetze (8) in Verbindung mit Gleichung (7) folgt nun sofort für die Größe des Energiemaximums S_m:

$$S_m = \frac{c_1 \,.\, 0{,}365 \sqrt{w}}{2666^{5,5}(e^{5,4770} - 1)} T^{5,5},$$

also

$$S_m = c_1 \,.\, 2{,}204 \,.\, 10^{-22} \sqrt{w}\, T^{5,5}. \tag{9}$$

Die Beziehungen (8) und (9) müssen bei genügend langen Wellen (und tiefen Temperaturen) strenge Gültigkeit besitzen.

Wir führen nun noch die weitere Beschränkung ein, daß die Energiemaxima bei so langen Wellen liegen, d. h. die Temperaturen so tief sein mögen, daß diejenige Strahlungsenergie, welche auf die kurzen, schon außerhalb des Gültigkeitsbereiches der Gleichung (6) liegenden, Wellen entfällt — oder doch die Differenz zwischen dieser tatsächlich vorhandenen Energie und der nach Gleichung (7) auch für jene Spektralgebiete berechneten Intensitätswerte — gegenüber der langwelligen Energie vernachlässigt werden kann. In diesem Falle werden wir aus unserer Gleichung (7) einen angenähert richtigen Wert auch für die Gesamtstrahlung erhalten, nämlich

$$\int_0^\infty S\, d\lambda = c_1 \,.\, 0{,}365 \sqrt{w} \int_0^\infty \lambda^{-5,5} \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1\right)^{-1} d\lambda.$$

Zur Berechnung des Integrals führe man die Substitution

$$\frac{c_2}{\lambda T} = x$$

ein, also

$$d\lambda = -\frac{c_2}{T x^2}\, dx.$$

Es folgt dann

$$\int_0^\infty S\, d\lambda = \frac{c_1 \,.\, 0{,}365 \sqrt{w}\, T^{4,5}}{c_2^{4,5}} \int_0^\infty \frac{x^{3,5}\, dx}{e^x - 1}.$$

Bezeichnen wir das Integral auf der rechten Seite mit Z, so erhalten wir durch Reihenentwickelung

$$Z = \int_0^\infty x^{3,5} (e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \ldots) \, dx .$$

Hieraus ergibt sich weiter

$$Z = \int_0^\infty x^{3,5} \, e^{-x} \, dx \left(1 + \frac{1}{2^{4,5}} + \frac{1}{3^{4,5}} + \ldots\right),$$

also

$$Z = 1{,}0547 \int_0^\infty x^{3,5} \, e^{-x} \, dx .$$

Somit haben wir das obige Integral auf ein Eulersches Integral zweiter Gattung, nämlich auf die Gammafunktion des Argumentes 4,5, zurückgeführt, so daß wir schreiben können

$$Z = 1{,}0547 \, \Gamma(4{,}5) .$$

Nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Γ-Funktionen ist nun

$$\Gamma(4{,}5) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^7} \frac{\Gamma(8)}{\Gamma(4)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^7} \frac{7!}{3!} ,$$

folglich

$$Z = 1{,}0547 \frac{\sqrt{\pi}}{2^7} \frac{7!}{3!} = 12{,}2680$$

und demnach ergibt sich für die gesuchte Gesamtstrahlung

$$\int_0^\infty S \, d\lambda = \frac{c_1 \, . \, 0{,}365 \sqrt{w} \, T^{4,5}}{c_2^{4,5}} \, 12{,}2680 ,$$

also

$$\int_0^\infty S \, d\lambda = c_1 \, . \, 8{,}156 \, . \, 10^{-19} \sqrt{w} \, T^{4,5} . \tag{10}$$

Die Gleichungen (8), (9) und (10) enthalten die für alle Metalle bei tiefen Temperaturen gültigen Strahlungsgesetze. Was zunächst das Verschiebungsgesetz (8) anbelangt, so zeigt es eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit den Resultaten

der Lummer-Pringsheimschen Untersuchungen[1]) über die Energieverteilung im Spektrum des blanken Platins. Diese Messungen erstreckten sich auf ein Temperaturintervall von 802—1845° abs., wobei die Lage des Energiemaximums von 3,2 μ bis 1,4 μ wanderte, und ergaben das Verschiebungsgesetz

$$\lambda_m T = \text{const.} = 2630.$$

Der Zahlenwert dieses Produktes variierte innerhalb des angegebenen Beobachtungsbereiches zwischen 2570 und 2690, ohne jedoch einen regelmäßigen Gang mit der Temperatur erkennen zu lassen. Die Übereinstimmung mit unserem theoretisch gefundenen Werte 2666 ist daher als vollkommen zu betrachten. Das Spektralgebiet, auf welches sich jene experimentellen Beobachtungen beziehen, liegt nun aber schon ziemlich weit außerhalb des Bereiches, für das die Voraussetzungen unserer Theorie erfüllt zu sein schienen. Damit die Verschiebung der Energiemaxima streng nach Maßgabe der Gleichung (8) vor sich gehe, ist es ja erforderlich, daß die Absorption $(100 - R)$ umgekehrt proportional der Wurzel aus der Wellenlänge verlaufe.[2]) Aus den Beobachtungen von Hagen und Rubens[3]) geht aber hervor, daß diese Bedingung zwischen 1,4 und 3,2 μ auch beim Platin keineswegs erfüllt ist. Allerdings ist zu beachten, daß jene Hagen-Rubensschen Reflexionsmessungen sich sämtlich nur auf Zimmertemperatur beziehen; für die Lage der Energiemaxima kommt es aber darauf an, welche spektrale Verteilung die Reflexion bei der Temperatur des strahlenden Körpers besitzt. Es läßt sich daher wohl die Schlußfolgerung ziehen, daß sich das Reflexionsvermögen im kurzwelligen Teile des ultraroten Spektrums in der Weise mit

---

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verh. d. Deutschen Physik. Gesellsch. zu Berlin 1. p. 215. 1899.

2) Man kann auch rückwärts aus der auf experimentellem Wege von Lummer und Pringsheim gefundenen Beziehung $\lambda_m T = 2630$ den Zusammenhang zwischen $100 - R$ und λ berechnen, indem man von dem Ansatz

$$S = \frac{100 - R}{100} E = f(\lambda) E$$

ausgeht. Man findet dann sehr leicht, daß $f(\lambda)$ — bei konstanter Temperatur — sehr nahe proportional $1/\sqrt{\lambda}$ sein muß, falls $\lambda_m T = 2630$ ist.

3) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. p. 1. 1902.

der Temperatur ändert, daß das Produkt $(100 - R)\sqrt{\lambda}$ daselbst bei höheren Temperaturen weniger stark mit λ variiert als bei Zimmertemperatur. Freilich kommt aber noch der Umstand hinzu, daß die Lage der Energiemaxima gegen geringe Schwankungen des Reflexionsvermögens überhaupt ziemlich unempfindlich ist.

Die Gleichungen (9) und (10) enthalten noch nicht die vollständigen Beziehungen zwischen maximaler Energie bez. Gesamtstrahlung und Temperatur; denn der spezifische Widerstand w, der in diesen Formeln und auch in Gleichung (7) auftritt, ist ja selbst noch eine Funktion von T.[1]) In erster

1) Man kann die oben bezeichneten Formeln offenbar zur Berechnung spezieller Fälle benutzen, wenn die Größe des spezifischen Widerstandes auch für die in Frage kommenden Temperaturen bekannt ist. Hagen und Rubens haben in ihrer schon zitierten Arbeit behufs Richtigstellung älterer, ersichtlich fehlerhafter, Messungen von O. Wiedeburg gelegentlich auch die Gesamtstrahlung einiger Metalle, nämlich von Silber, Platin, Stahl und Manganin, bei 100° C. miteinander verglichen. Für diese Temperatur liegt das Energiemaximum zwischen 7 und 8 μ, d. h. der wesentliche Teil der Gesamtstrahlung in einem Spektralgebiete, in welchem sich die Beziehung

$$100 - R = \frac{0{,}365}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{w}$$

in den meisten Fällen noch einigermaßen erfüllt zeigt. Da die Verfasser in derselben Arbeit auch die spezifischen Widerstände der von ihnen benutzten Metalle und deren Temperaturkoeffizienten mitteilen, so habe ich versucht, die oben für die Gesamtstrahlung abgeleitete Gleichung (10) auf jene Messungsergebnisse anzuwenden. Unter Berücksichtigung des Umstandes, daß bei den Messungen ein Schirm von Zimmertemperatur (18° C.) benutzt wurde, müßten die für die einzelnen Metalle beobachteten Werte gemäß unserer Formel der Größe

$$\sqrt{w_{373^0}}\,373^{4,5} - \sqrt{w_{291^0}}\,291^{4,5}$$

proportional sein. Dieser Ausdruck liefert, wenn wir den für Manganin hiernach berechneten Wert gleich 1 setzen, folgende relative Strahlungsintensitäten (vgl. unter „berechnet"). Die zweite Reihe enthält (unter „beobachtet")

	Silber	Platin	Stahl	Manganin
berechnet	0,23	0,58	0,79	1
beobachtet	0,12	0,58	0,83	1

die entsprechenden von Hagen und Rubens (Ann. d. Phys. **11.** p. 888.

Annäherung kann man nun bekanntlich den Temperaturkoeffizienten des Widerstandes der reinen Metalle dem Ausdehnungskoeffizienten der permanenten Gase gleichsetzen, so daß sich ihr spezifischer Widerstand w bei einer beliebigen absoluten Temperatur T zu

$$w = w_0 \frac{T}{273} \tag{11}$$

ergibt, wenn unter w_0 der spezifische Widerstand bei 0° C. verstanden wird.

Streng genommen ist der Temperaturkoeffizient ja allerdings weder für alle Metalle der gleiche, noch auch innerhalb weiter Temperaturintervalle für ein und denselben Leiter konstant. Man darf indessen den Fehler, den man begeht, indem man den Widerstand nach jener angenäherten Beziehung zur absoluten Temperatur berechnet, nicht überschätzen. Die genauesten Beobachtungen über die Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur sind für Platin angestellt worden. So gibt u. a. Holborn[1]) eine zweikonstantige Formel an, durch welche sich seine diesbezüglichen Messungen zwischen 0 und 500° C. vorzüglich darstellen lassen. Berechnet man nun den Wert von $\sqrt{w}$ — in allen unseren Strahlungsformeln tritt ja niemals der Widerstand selbst, sondern nur die Wurzel aus w auf — einerseits nach Gleichung (11) und andererseits nach der empirischen Formel von Holborn, so bleiben die Differenzen dieser Wertepaare bis zu der höchsten Temperatur (500° C.), bei welcher Messungen angestellt worden sind, unter-

---

1903) experimentell ermittelten Werte (wiederum auf die Strahlung von Manganin als Einheit bezogen). Wie man sieht, ist die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung für Platin und Stahl eine vorzügliche, während sich freilich für Silber eine bedeutende Diskrepanz zeigt. Auch die Reflexionsmessungen derselben Autoren lassen erkennen, daß von jenen Metallen sich in der Gegend von 7—8 μ das Silber am schlechtesten der Beziehung

$$\frac{(100 - R)\sqrt{\lambda}}{\sqrt{w}} = \text{konst.}$$

fügt. Immerhin wäre aber auch nach den Reflexionsbeobachtungen der Herren Hagen und Rubens ein höherer Wert als 0,12 für die relative Strahlungsintensität des Silbers zu erwarten gewesen; doch mag wohl den Emissionsmessungen eine größere Sicherheit zukommen.

1) L. Holborn, Ann. d. Phys. 6. p. 242. 1901.

halb 1 Proz. Auch für Temperaturen weit unter 0^0 C. ergeben sich aus Gleichung (11) für $\sqrt{w}$ Werte, die bis auf wenige Prozente mit den vorliegenden Beobachtungen übereinstimmen. Ähnlich liegen die Verhältnisse auch bei den anderen Metallen, soweit uns für solche schon das erforderliche Beobachtungsmaterial zur Verfügung steht. Wie groß die Fehler bei sehr hohen Temperaturen werden, läßt sich einstweilen nicht übersehen, da diesbezügliche zuverlässige Beobachtungen noch vollständig fehlen. Die Mehrzahl unserer Betrachtungen sollte sich ja aber ohnedies auf mäßige Temperaturen beschränken.

Führen wir nun die Beziehung (11) in unsere Strahlungsformeln ein, so erhalten wir zunächst aus Gleichung (7) für die bei irgend einer Temperatur und Wellenlänge — natürlich wieder innerhalb des beschränkten Geltungsbereiches — von einem Metall emittierte Energie den Ausdruck

$$S = c_1 \,.\, 0{,}0221 \sqrt{w_0} \sqrt{T}\, \lambda^{-5{,}5} \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1\right)^{-1}. \tag{12}$$

Ferner ergibt sich aus Gleichung (9) für das Energiemaximum

$$S_m = c_1 \,.\, 1{,}334 \,.\, 10^{-23} \sqrt{w_0}\, T^6 \tag{13}$$

und aus Gleichung (10) für die Gesamtstrahlung

$$\int_0^\infty S\, d\lambda = c_1 \,.\, 4{,}936 \,.\, 10^{-20} \sqrt{w_0}\, T^5. \tag{14}$$

Bei der Emission der reinen Metalle ist demnach bei relativ niedrigen Temperaturen die *Maximalenergie der sechsten* und *die Gesamtstrahlung der fünften Potenz der absoluten Temperatur* (und beide der Wurzel aus den spezifischen Widerständen der betreffenden Strahlungsquellen) proportional. Das sind nun wieder dieselben Beziehungen, die sich auf empirischem Wege für die Strahlung des Platins bereits früher ergeben haben. Lummer und Kurlbaum[1]) fanden nämlich, daß die Gesamtemission dieses Metalles innerhalb des Temperaturintervalles von 700—1800° abs. mit der fünften Potenz der absoluten Temperatur fortschreitet, und die Versuche von

1) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Verh. d. Physik. Gesellsch. zu Berlin **17.** p. 106. 1898.

Lummer und Pringsheim[1]) führten zu dem Resultate, daß die Energiemaxima des Platins zwischen 800 und 1850° abs. der sechsten Potenz von T proportional seien. Wir begegnen hier also analogen Verhältnissen wie bei dem Verschiebungsgesetze (8), indem wir sehen, daß die für relativ niedrige Temperaturen abgeleiteten Strahlungsgesetze (13) und (14) noch innerhalb recht weiter Temperaturgrenzen — wenigstens bei Platin — erfüllt werden. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß dies auch für die meisten anderen reinen Metalle zutreffen wird. Starke Abweichungen dürften dagegen schon für tiefe Temperaturen bei solchen Legierungen zu erwarten sein, die, wie z. B. Manganin, einen außerordentlich kleinen Temperaturkoeffizienten des Widerstandes besitzen. Es kann ferner keinem Zweifel unterliegen, daß bei den hohen Temperaturen der Lummer-Kurlbaum-Pringsheimschen Beobachtungen den Gesetzen (13) und (14) keine *absolute* Genauigkeit zukommt. Auch den genannten Autoren zufolge handelt es sich hier nur um angenähert gültige Beziehungen.

Wir wollen nun noch die Strahlung des absolut schwarzen Körpers mit derjenigen der Metalle, wie sie sich aus den obigen Entwickelungen ergeben hat, vergleichen. Aus (1) und (12) erhalten wir

$$\frac{E}{S} = \frac{1}{0{,}0221\sqrt{w_0}}\,\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{T}}. \tag{15}$$

Die Metalle werden hiernach um so „schwärzer", je höher ihre Temperatur steigt. Selbstverständlich gilt auch die letzte Gleichung nur bis zu einer gewissen Temperaturgrenze, da ja der Quotient E/S niemals kleiner als 1 werden kann.

Da sich ferner E_m und $\int E\,d\lambda$ zahlenmäßig aus der Planckschen Formel (1) der Energieverteilung berechnen läßt — es ist nämlich

$$E_m = \frac{1}{2940^5\,(e^{4{,}9651}-1)}\,T^5 = c_1 \,.\, 3{,}196 \,.\, 10^{-20}\,T^5 \tag{16}$$

und

$$\int_0^\infty E\,d\lambda = \frac{c_1}{c_2^4}\,6{,}4938\,T^4 = c_1 \,.\, 1{,}429 \,.\, 10^{-16}\,T^4\ —, \tag{17}$$

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verh. d. Deutschen Physik. Gesellsch. zu Berlin 1. p. 215. 1899.

so ergeben sich aus (13) und (14) in Verbindung mit diesen Werten folgende Ausdrücke für die Verhältnisse der Energiemaxima bez. der Gesamtstrahlungen des absolut schwarzen Körpers und eines Metalles:

$$\frac{E_m}{S_m} = \frac{2396}{\sqrt{w_0}\, T} \tag{18}$$

und

$$\frac{\int_0^\infty E\, d\lambda}{\int_0^\infty S\, d\lambda} = \frac{2895}{\sqrt{w_0}\, T}. \tag{19}$$

Jeder dieser beiden Quotienten ist also der absoluten Temperatur umgekehrt proportional.

Lummer und Kurlbaum haben die Gesamtstrahlung des blanken Platins mit der des schwarzen Körpers bei verschiedenen, relativ hohen, Temperaturen unmittelbar miteinander verglichen. Sie geben in ihrer Mitteilung[1]) Zahlenwerte an für die Größen

$$\frac{\varepsilon}{T_2^4 - T_1^4} \quad \text{und} \quad \frac{\sigma}{T_2^4 - T_1^4},$$

wobei T_1 die Temperatur des Bolometers (290° abs.) und T_2 diejenige der Strahlungsquelle, ε die relative Gesamtstrahlung des schwarzen Körpers, σ diejenige des Metalles gegen das Bolometer bedeutet. Man braucht also die zusammengehörigen jener Wertepaare nur durcheinander zu dividieren, um die Größe ε/σ aus den Beobachtungen zu erhalten. Da sich die Größe $\varepsilon/T_2^4 - T_1^4$ im Einklange mit dem Stefan-Boltzmannschen Gesetze bis auf durchschnittlich 1 Proz. als konstant erweist, so habe ich ihren Mittelwert zur Berechnung jener Quotienten benutzt. Die so gewonnenen Zahlen sind in der folgenden Tabelle unter „ε/σ beob." nebst den zugehörigen absoluten Temperaturen zusammengestellt.

Da ich gezeigt hatte, daß die Resultate unserer theoretischen Betrachtungen in mehrfacher Hinsicht auch noch bei hohen Temperaturen mit den Beobachtungen an Platin über-

1) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Verh. d. Deutschen Physik. Gesellsch. zu Berlin 17. p. 106. 1898.

einstimmen, so erschien es von Interesse, zu prüfen, inwieweit eine Übereinstimmung etwa auch in quantitativer Beziehung vorhanden wäre. Es wurden daher die Quotienten ε/σ für die Temperaturen der Lummer-Kurlbaumschen Messungen nach unseren oben abgeleiteten Formeln berechnet. Für die höchsten Temperaturen kann man zu diesem Zwecke offenbar die Gleichung (19) selbst benutzen, da man in diesen Fällen die relative Strahlung der absoluten Strahlung gleich setzen darf. Allgemein wird jedoch

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{\left[\int_0^\infty E\,d\lambda\right]_{T_2} - \left[\int_0^\infty E\,d\lambda\right]_{T_1}}{\left[\int_0^\infty S\,d\lambda\right]_{T_2} - \left[\int_0^\infty S\,d\lambda\right]_{T_1}}$$

zu setzen sein. Daher ergibt sich

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{2895}{\sqrt{w_0}}\,\frac{T_2^4 - T_1^4}{T_2^5 - T_1^5}.$$

Setzen wir hierin noch für w_0 den spezifischen Widerstand des reinen Platins — $w_0 = 0{,}108$ — ein, so wird für dieses Metall

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = 8810\,\frac{T_2^4 - T_1^4}{T_2^5 - T_1^5}.$$

Nach dieser Formel sind (für $T_1 = 290$) die in der Tabelle unter „ε/σ ber.“ verzeichneten Werte berechnet worden.

T_2	$\frac{\varepsilon}{\sigma}$ beob.	$\frac{\varepsilon}{\sigma}$ ber.
492	25,5	16,9
654	16,7	13,2
795	13,4	10,9
1108	9,0	7,9
1481	6,5	5,9
1761	5,6	5,0

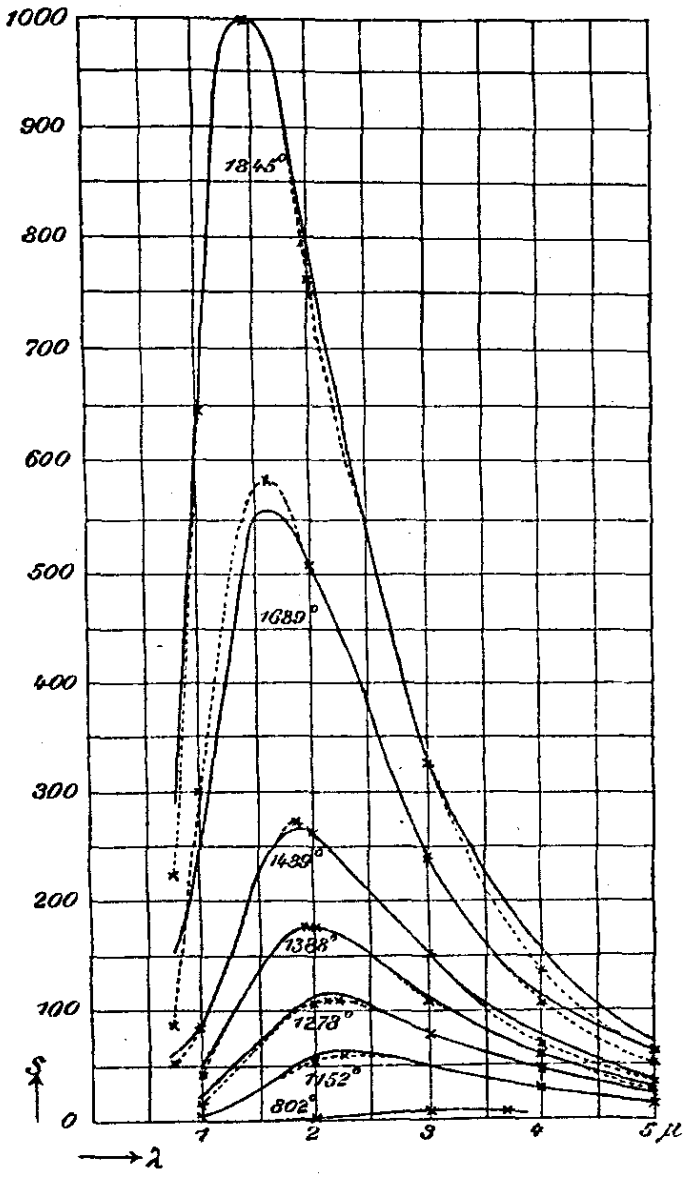
Die beiden Zahlenreihen lassen erkennen, daß unsere Theorie zum mindesten der Größenordnung nach den tatsächlichen Verhältnissen in befriedigender Weise gerecht wird. Bei den höchsten Temperaturen ist die Übereinstimmung zwischen

den beobachteten und den berechneten Werten sogar weit besser, als zunächst erwartet werden konnte. Auffällig ist allerdings, daß die Abweichungen gerade bei den tiefsten Temperaturen, insbesondere bei $T_2 = 492$, so groß werden. Dafür läßt sich, falls die Beobachtungen fehlerfrei sind, ein Grund kaum erkennen. Für 492° abs. liegt das Energiemaximum der schwarzen Strahlung bei 6 μ. In dieser Gegend zeigt sich beim Platin die Beziehung (6) zwischen Reflexion und Wellenlänge in erster Annäherung noch ziemlich gut erfüllt. Soweit aber hier und zumal bei kürzeren Wellen Abweichungen vorhanden sind, liefert die Berechnung nach Gleichung (6) für $100 - R$ (wenigstens bei Zimmertemperatur, für die allein Beobachtungen vorliegen) stets zu kleine Werte.[1]) Man dürfte demnach wohl erwarten, daß „ε/σ ber." einen etwas zu großen, aber nicht einen zu kleinen Wert bei $T_2 = 492$ ergeben würde. Ebenso ist es nach den früheren Darlegungen ausgeschlossen, daß jene beträchtliche Diskrepanz von der Benutzung der nur angenähert richtigen Beziehung des Widerstandes zur Temperatur herrühren könnte. Wäre ferner das bei den Versuchen benutzte Platin nicht rein gewesen, so würde jedenfalls sein spezifischer Widerstand nicht gleich 0,108 sein, sondern einen höheren Wert besitzen. Auch das könnte nur zur Folge haben, daß „ε/σ ber." gegenüber den beobachteten Zahlen zu groß ausgefallen wäre. Man könnte schließlich noch daran denken, daß die Oberfläche des strahlenden Platinbleches nicht völlig blank gewesen wäre. Dann hätte die Beobachtung einen zu hohen Wert für σ gegeben, „ε/σ ber." würde daher auch in diesem Falle höchstens zu groß erscheinen können. Mag immerhin ein Teil der Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung der Theorie zur Last fallen, so möchte ich es unter diesen Umständen doch nicht für ausgeschlossen halten, daß bei den tiefsten Temperaturen die beobachteten Werte jener Quotienten zu hoch ausgefallen sind, d. h. daß die Platinstrahlung als zu klein gemessen worden ist. Die Emission der blanken Metalle ist ja bei jenen Temperaturen in der Tat außerordentlich gering, und ihre Messung daher sehr leicht Fehlern ausgesetzt. Freilich geht aber die Tendenz solcher

1) Vgl. E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. **8.** p. 1. 1902; **11.** p. 873. 1903.

Fehler im allgemeinen gerade dahin, die Strahlungswerte zu groß erscheinen zu lassen.[1])

Die Gesetze (13) und (14) für die Maximalenergie und die Gesamtstrahlung, wie auch das Verschiebungsgesetz (8), sind notwendige Konsequenzen der oben abgeleiteten Spektralformel (12). Die spektrale Verteilung der Energie in der Emission des blanken Platins ist von Lummer und Pringsheim für die absoluten Temperaturen 802, 1152, 1278, 1388, 1489, 1689 und 1845° auf experimentellem Wege festgestellt worden.[2]) Trotz des Mangels einer für diese Temperaturgrade gültigen theoretischen Grundlage der Gleichung (12) habe ich, ermutigt durch die weitgehende Übereinstimmung der übrigen Rechnungsergebnisse mit den Beobachtungen, auch die Energieverteilung für die Platinstrahlung bei den genannten Temperaturen nach der Formel (12) zahlenmäßig berechnet. Der höchste Energiewert, also das Strahlungsmaximum bei 1845° wurde gleich 1000 gesetzt. Lummer und Pringsheim geben ihre Messungsresultate in einem Kurvenblatte wieder. Diesem entnahm ich die von ihnen beobachteten Zahlen und setzte auch hier die Größe des Strahlungsmaximums bei 1845° gleich 1000. Die Resultate der Rechnung und der Lummer-Pringsheimschen Beob-



1) Vgl. auch F. Kurlbaum, Wied. Ann. 67. p. 846. 1899.

2) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. zu Berlin 1. p. 215. 1899.

achtungen sind in der Figur graphisch dargestellt. Die ausgezogenen Kurven geben die Messungen der genannten Autoren wieder, und die aus Gleichung (12) berechnete Energieverteilung ist, soweit sie nicht mit den Beobachtungen zusammenfällt, durch gestrichelte Kurven bezeichnet. Der größeren Deutlichkeit halber sind die berechneten Werte noch durch Kreuze markiert.

Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung ist, wie man sieht, auch noch bei diesen kleinen Wellenlängen und hohen Temperaturen eine wohlbefriedigende. Es ergibt sich demnach, daß die Energieverteilung des blanken Platins in ziemlich weitgehender Annäherung durch die Formel (12) dargestellt wird, und wahrscheinlich wird sich diese Gleichung auch auf die übrigen reinen Metalle mit ähnlichem Erfolge anwenden lassen.

Im sichtbaren Teile des Spektrums können unsere Formeln natürlich nicht zu Recht bestehen. Denn abgesehen von den übrigen Einschränkungen enthalten sie eine Abhängigkeit des Absorptionsvermögens $100 - R/100$ von der Temperatur. Die Beobachtungen von Zeeman[1]), Königsberger[2]), Holborn und Henning[3]) u. a. haben aber gezeigt, daß die optischen Konstanten der Metalle im sichtbaren Spektrum von der Temperatur unabhängig sind. Daß sich dessenungeachtet ein so weiter Geltungsbereich unserer Gleichungen ergibt, hat seinen Grund darin, daß einerseits bei tiefen Temperaturen die sichtbare Strahlung überhaupt nicht ins Gewicht fällt, und daß andererseits bei hohen Temperaturen der Fehler, den wir begehen, indem wir für $T =$ konst. *ausnahmslos* von der Beziehung

$$100 - R = \frac{\text{konst.}}{\sqrt{\lambda}}$$

Gebrauch machen, durch den zweiten Fehler, der darin liegt, daß wir die Absorption in allen Fällen der Größe $\sqrt{T}$ pro-

1) P. Zeeman, Commun. from the labor. of Leiden 1895; Arch. Néerl. 4. p. 314. 1900.

2) J. Königsberger, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. zu Berlin 1. p. 247. 1899.

3) L. Holborn u. F. Henning, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1905. p. 311.

portional setzen, zum großen Teile kompensiert wird.[1]) Ähnlich würden sich die Dinge im kurzwelligen Bezirke des ultraroten Spektrums gestalten, falls dort die Absorption mit steigender Temperatur langsam zunimmt. Beobachtungen liegen hierüber noch nicht vor. Wir sind erst wieder im Gebiete der langen Wellen über die Abhängigkeit des Absorptionsvermögens von der Temperatur unterrichtet: denn hier ist $100 - R$ streng proportional $\sqrt{w}$.

Daß die Energieverteilung im Spektrum des blanken Platins ihrem Charakter nach unserer Formel (12) entspricht, läßt sich noch aus einem anderen Umstande erkennen. Solange der Wert des Produktes λT nicht größer ist als ungefähr 3000 (d. h. bei relativ kurzen Wellen) kann man bekanntlich zur Darstellung der schwarzen Strahlung E statt der Planckschen Formel (1) mit gleichem Erfolge die Wiensche Spektralgleichung

$$E = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}$$

benutzen. Bei konstanter Wellenlänge läßt sich in diesen Fällen die Abhängigkeit der Strahlung von der Temperatur am besten aus der Funktion $\log E$ erkennen. Für diese letztere ergibt sich aber aus der Wienschen Gleichung

$$\log E = \gamma_1 - \frac{\gamma_2}{T},$$

wenn mit γ_1 und γ_2 konstante Größen bezeichnet werden. In Übereinstimmung mit dieser Relation haben auch die Beobachtungen gezeigt, daß wenn man zur Veranschaulichung der isochromatischen Kurven den Logarithmus der Energie als

1) So ist beispielsweise das prozentische Absorptionsvermögen des Platins, $100 - R$, im sichtbaren Rot bei der Wellenlänge $\lambda = 0{,}65\ \mu$ nach Hagen u. Rubens bei Zimmertemperatur gleich 34, und dieser Wert erweist sich nach den Beobachtungen von Holborn u. Henning auch noch bei einer Temperatur von 1800° abs. als gültig. (Bei 2000° abs. liegt bereits der Schmelzpunkt des Metalles.) Nach der Formel

$$100 - R = \frac{36{,}5\sqrt{w_0}}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\frac{T}{273}}$$

erhält man nun für $T = 273°$ (0° C.) den Wert $100 - R = 15$, also eine ganz falsche Zahl, dagegen ergibt sich in derselben Weise für $T = 1800°$ $100 - R = 38$. Dabei ist es offenbar günstig, daß in jener Formel die Absorption nur als der *Wurzel* aus der Temperatur proportional erscheint.

Funktion der reziproken absoluten Temperatur graphisch darstellt, im Falle des schwarzen Körpers bei kurzen Wellenlängen gerade Linien erhalten werden. Lummer und Pringsheim weisen aber darauf hin, daß die analogen Isochromaten des blanken Platins — $\log S = f(1/T)$ — nicht geradlinig verlaufen, sondern „eine deutliche Krümmung (konvex zur $1/T$-Achse) zeigen, die nach den höheren Temperaturen hin relativ schnell zunimmt".[1])

Ersetzen wir nun auch in unserer Strahlungsgleichung der Metalle den Planckschen durch den Wienschen Ausdruck, so ändert sich Gleichung (12) in

$$S = c_1 \,.\, 0{,}0221 \sqrt{w_0} \sqrt{T} \lambda^{-5{,}5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}. \tag{20}$$

In dem Falle $\lambda =$ konst. ergibt sich hieraus

$$\log S = \delta_1 - \frac{\delta_2}{T} + \tfrac{1}{2} \log T, \tag{21}$$

worin δ_1 und δ_2 Konstanten darstellen. Diese Gleichung sagt aus, daß die Funktion $\log S$ gegen die $1/T$-Achse konvex gekrümmt ist, und daß die Krümmung mit steigender Temperatur zunimmt; sie führt also gerade zu demselben Resultate, das sich aus den Beobachtungen am Platin ergeben hatte.

Aus dem zuletzt erwähnten Ergebnisse der Lummer-Pringsheimschen Versuche kann man auch umgekehrt ohne weiteres die Schlußfolgerung ziehen, daß das Reflexionsvermögen des Platins im ersten Teile des ultraroten Spektralgebietes mit steigender Temperatur abnehmen muß.

Den vorstehenden Betrachtungen ist zu entnehmen, daß die Strahlung der Metalle im Sinne der elektromagnetischen Lichttheorie zu einem erheblichen Betrage durch ihr elektrisches Leitvermögen bestimmt wird, und daß die bereits früher für die Emission des Platins auf experimentellem Wege gefundenen Gesetze innerhalb gewisser Grenzen auch für die übrigen reinen Metalle Gültigkeit besitzen müssen.

Charlottenburg, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule,
Juli 1905.

---

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. zu Berlin **1.** p. 229. 1899.

(Eingegangen 20. Juli 1905.)