8. *Vereinfachte Ableitung der kombinatorischen Formel, welche der Planckschen Strahlungstheorie zugrunde liegt;*

von P. Ehrenfest u. H. Kamerlingh Onnes.

Wir haben im Auge den Ausdruck

$$C_P^N = \frac{(N-1+P)!}{P!\,(N-1)!} \tag{A}$$

der angibt, auf wieviel verschiedene Arten N monochromatische Resonatoren $R_1, R_2 \ldots . R_N$ über die Energiestufen $0, \varepsilon, 2\varepsilon, \ldots .$ verteilt werden können, wenn sie jedesmal zusammen den vorgegebenen Energieinhalt $P\varepsilon$ besitzen sollen. (Zwei Verteilungsarten sollen dann und nur dann als identisch angesehen werden, wenn der 1., 2., ... N-te Resonator beidemal auf derselben Energiestufe liegt.)

Wir führen an Hand eines Beispieles ein „*Verteilungssymbol*“ ein. Sei $N = 4$, $P = 7$. Eine der möglichen Verteilungen ist dann: Der Resonator R_1 liegt auf der Energiestufe 4ε (hat Energieinhalt 4ε), R_2 auf Energiestufe 2ε, R_3 auf 0ε, R_4 auf ε. Unser Symbol soll von links nach rechts gelesen, den Energieinhalt von R_1, R_2, R_3, R_4 bei dieser speziellen Verteilung angeben und vor allem zum Ausdruck bringen, daß der totale Energieinhalt 7ε ist. Es möge für den betrachteten Fall folgende Gestalt haben

$$\mathrm{II}\ \underset{|}{\underset{\varepsilon}{\vdash}}\underset{|}{\underset{\varepsilon}{\vdash}}\underset{|}{\underset{\varepsilon}{\vdash}}\underset{|}{\underset{\varepsilon}{\vdash}}\ 0\ \underset{|}{\underset{\varepsilon}{\vdash}}\underset{|}{\underset{\varepsilon}{\vdash}}\ 00\ \underset{|}{\underset{\varepsilon}{\vdash}}\ \mathrm{II} \tag{B}$$

oder auch, einfacher:

$$\mathrm{II}\ \varepsilon\,\varepsilon\,\varepsilon\,\varepsilon\ 0\ \varepsilon\,\varepsilon\ 00\ \varepsilon\ \mathrm{II}. \tag{C}$$

Bei allgemeinen N, P-Werten enthält das Verteilungs-

symbol P mal das Zeichen ε und $(N-1)$ mal[1]) das Zeichen 0. Wie viele *voneinander verschiedene* Verteilungssymbole kann man aus ihnen bilden? Antwort:

$$\frac{(N-1+P)!}{P!\,(N-1)!} \tag{1}$$

Beweis: Man sehe *zunächst* die $(N-1+P)$ Zeichen $\varepsilon \ldots \varepsilon$, $0 \ldots 0$ als ebensoviele zu unterscheidende Individuen an, dann kann man sie auf

$$(N-1+P)! \tag{2}$$

Weisen zwischen II II anordnen. *Hinterher* aber hat man zu beachten: Je

$$(N-1)!\,P! \tag{3}$$

von diesen Anordnungsweisen geben *dasselbe* Verteilungssymbol und lassen jeden Resonator auf seiner Energiestufe liegen; nämlich alle diejenigen Anordnungen, die auseinander durch Permutation der P Zeichen[2]) ε oder der $(N-1)$ Zeichen 0 hervorgehen. Die Anzahl der *voneinander verschiedenen* Verteilungssymbole und Verteilungen erhält man also, indem man (2) durch (3) dividiert. q. e. d.

Anhang.

Der Gegensatz zwischen der Energiestufenhypothese von Planck und der Energiequantenhypothese von Einstein.

Die Permutation der Zeichen ε ist ein rein formeller Kunstgriff, genau ebenso formell wie die Permutation der Zeichen 0. Wiederholt hat man den analogen — ebenfalls rein formellen — Kunstgriff, dessen

---

1) Man gelangt zur Einführung dieser $(N-1)$ „Zwischenwände" zwischen den N Resonatoren, sobald man danach trachtet sich das Auftreten von $(N-1)!$ im Nenner von (A) deutlich zu machen. — Planck zeigt, daß die gesuchte Anzahl von Verteilungen gleich ist der Anzahl von allen „Kombinationen mit Wiederholungen aus N Elementen von der P-ten Klasse" und beruft sich für den Beweis, daß diese durch den Ausdruck (A) gegeben wird auf die betreffenden Ableitungen der Kombinationslehre. In den Lehrbüchern der Kombinationslehre findet man dann die Formel durch ein beträchtlich langes Verfahren abgeleitet, daß auch einen „Schluß von n auf $n+1$" erfordert. Alles zusammengenommen liefert das kein anschauliches Bild vom Zustandekommen der Endformel.

2) Vgl. den Anhang.

sich Hr. Planck bedient: Verteilung von P „Energieelementen" über die N Resonatoren — *mißverständlicherweise* eine physikalische Interpretation unterschoben, die der Planckschen Strahlungsformel absolut widerstreitet und zur Wienschen Strahlungsformel führen würde. Man identifizierte nämlich die Planckschen „Energieelemente" weitgehend mit den Einsteinschen „Lichtquanten" und sagte dementsprechend: der Unterschied zwischen Planck und Einstein besteht darin, daß der letztere auch im leeren Raume die Existenz unabhängiger Energiequanta annimmt, der erstere aber nur im Inneren der Materie, in den Resonatoren. Es ist mehrfach auf den Irrtum hingewiesen worden[1]), der dieser Auffassung zugrundeliegt. — Bei Einstein handelt es sich wirklich um P, gleichartige, *voneinander losgelöste* Quanten. Er betrachtet z. B. den Fall, daß sie sich irreversibel aus einem Raume von N_1 cm³ auf den größeren Raum von N_2 cm³ ausbreiten und berechnet nach der Boltzmannschen Entropieformel: $S = k \lg W$, daß dieses eine Entropievermehrung

$$(\alpha) \qquad S - S_0 = k \lg \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^P$$

liefert.[2]) Dieselbe Entropievermehrung, wie bei der entsprechenden irreversiblen Zerstreuung von P gleichartigen, unabhängigen Gasmolekülen. Denn die Anzahl Weisen, auf welche man P Quanta erst über N_1 dann über N_2 Raumzellen verteilen kann, verhält sich wie

$$(\beta) \qquad N_1^{\,P} : N_2^{\,P}.$$

Würde es sich auch bei Planck darum handeln, P voneinander losgelöste Quanta ε über N Resonatoren zu verteilen, so müßte auch hier beim Übergang von N_1 auf N_2 Resonatoren die Anzahl der möglichen Verteilungsweisen im Verhältnis (β) wachsen und entsprechend die Entropie nach Gleichung (α). Nun weiß man aber, daß Planck zu der ganz anderen Formel

$$(\gamma) \qquad \frac{(N_1 - 1 + P)!}{(N_1 - 1)!\,P!} : \frac{(N_2 - 1 + P)!}{(N_2 - 1)!\,P!}$$

gelangt (die nur für sehr große Werte von P annähernd mit (β) zusammenfällt) und zu einer entsprechenden Abhängigkeit der Entropie von N. — Wie erklärt sich das? — Nun, es handelt sich eben bei Planck nicht wirklich um P *voneinander losgelöste* Quanta ε; ihre Einführung ist cum grano salis zu nehmen; als genau ebenso formeller Kunstgriff wie unsere Permutation der Zeichen ε oder 0. *Wahres Objekt der Zählung* bleibt die Anzahl aller voneinander verschiedenen Verteilungen von N Resonatoren über die Energiestufen 0, ε, $\varepsilon\varepsilon$ .... bei vorgegebener Totalenergie $P\varepsilon$. Ist z. B. $P = 3$, $N = 2$ so muß Einstein $2^3 = 8$ Weisen

---

1) P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. **36.** p. 91. 1911; G. Krutkow, Physik. Zeitschr. **15.** p. 133. 363. 1914.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. **17.** p. 132. 1905.

unterscheiden, auf welche die drei (gleichartigen) Lichtquanten A, B, C über die Raumzellen 1, 2 verteilt werden können:

	A	B	C
I	1	1	1
II	1	1	2
III	1	2	1
IV	1	2	2
V	2	1	1
VI	2	1	2
VII	2	2	1
VIII	2	2	2

Planck hingegen muß die drei Verteilungen II, III, V nur als eine einzige zählen, denn sie alle drei besagen: der Resonator R_1 liegt auf Energiestufe $2\,\varepsilon$, R_2 auf Energiestufe ε; ebenso zählt er die Verteilungen IV, VI, VII als eine einzige: R_1 auf Stufe ε, R_2 auf Stufe $2\,\varepsilon$. Nimmt man noch I (R_1 auf Stufe $3\,\varepsilon$, R_2 auf $0\,\varepsilon$) und II (R_1 auf $0\,\varepsilon$, R_2 auf $3\,\varepsilon$) hinzu so bekommt man im ganzen wirklich

$$\frac{(N-1+P)!}{(N-1)!\,P!} = \frac{(2-1+3)!}{(2-1)!\;3!} = 4$$

verschiedene Verteilungsarten der Resonatoren R_1, R_2 über die Energiestufen.

Zusammenfassend: Die Einsteinsche Auffassung führt notwendig zur Entropieformel (α); damit notwendig zur Wienschen Strahlungsformel und sicher nicht zur Planckschen. *Der formelle Kunstgriff von Planck* (Verteilung von P Energieelementen ε über die N Resonatoren) *kann nicht im Sinne der Einsteinschen Lichtquanten interpretiert werden.*

Leiden, Oktober 1914.

(Eingegangen 31. Dezember 1914.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.