3. *Die Abzählung der Freiheitsgrade in einer Elektronenwolke (strahlender Körper);* *von A. Landé.*

Inhalt: I. Teil. § 1. Die Fouriersche Reihe. § 2. Die Freiheitsgrade des Hohlraumes. — II. Teil. § 3. Schwankungen der spektralen Intensitätsverteilung. § 4. Räumliche Intensitätsschwankungen. — Zusammenfassung.

I. Teil.

Die Strahlung in einem nach außen abgeschlossenen Raum läßt sich auf verschiedene Weise analysieren. J. H. Jeans[1]) löst sie in lauter *Eigenschwingungen* auf, von denen jede den *ganzen* abgeschlossenen Raum durchsetzt. Als Zahl der Eigenschwingungen im Volumen V und im Intervall $d\nu$ findet Jeans

$$dZ = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V d\nu \tag{1}$$

(Zahl der Freiheitsgrade). M. v. Laue[2]) baut die Strahlung aus lauter schmalen *Bündeln* von endlicher Länge auf; jedes Bündel wird im Intervall $d\nu$ durch eine bestimmte Zahl von Angaben (Koeffizienten einer Fourierschen Reihe) beschrieben. Durch Summation über alle in V möglichen Bündel gelangt v. Laue dann ebenfalls zu der Jeansschen Zahl (1) der Freiheitsgrade.

Bedenkt man nun, daß die Strahlung ihren Ursprung in leuchtenden Quellen im Innern oder an den Wänden des Hohlraumes hat, so ist dieses Resultat zunächst überraschend. Da nämlich, unabhängig vom Voluminhalt V, der Strahlungszustand an jedem Punkt des Hohlraumes durch die retardierten Potentiale der N Quellen bestimmt ist, so sollte dZ nicht proportional dem Voluminhalt V, sondern proportional der Quellenzahl N sein. Dieser Widerspruch mit dem Jeansschen Ergebnis wurde seinerzeit als Grund für die Abweichung der Jeansschen Strahlungsformel von der

1) J. H. Jeans, Phil. Mag. **10.** p. 91. 1905.
2) M. v. Laue, Ann. d. Phys. **44.** p. 1197. 1914.

Erfahrung hingestellt. Nach W. Ritz[1]) sollen nämlich aus allen überhaupt möglichen Lösungen der Maxwellschen Gleichungen nur diejenigen in Wirklichkeit zulässig sein, die sich auf *retardierte Potentiale* strahlender Quellen zurückführen lassen, was für die Gesamtheit der Jeansschen Eigenschwingungen nicht zutreffe. Daher stellten letztere eine zu große Mannigfaltigkeit von Lösungen der Maxwellschen Gleichungen dar, und die Zahl der Freiheitsgrade sei in Wirklichkeit von (1) abweichend. Entgegen dieser Auffassung wollen wir im Folgenden nachweisen, daß sich (als Gegenstück zur Auflösung in Jeanssche Eigenschwingungen und Lauesche Strahlenbündel) die Strahlung in V auch direkt aus retardierten Potentialen von N beliebig verteilten Oszillatoren ableiten läßt und dabei doch wieder genau die Jeanssche Zahl (1) herauskommt, also Unabhängigkeit von N, Proportionalität mit V. Wir zeigen nämlich, daß eine große Zahl von Freiheitsgraden nur verschwindende Energien tragen und dadurch von vornherein ausscheiden, während die Energien anderer Freiheitsgrade ihr Nichtverschwinden der Existenz von Oszillatoren an einer bestimmten zugeordneten Stelle des *Raumes* verdanken, wodurch die Proportionalität von dZ mit dem Voluminhalt V verständlich wird.

§ 1. Die Fouriersche Reihe.

In dem Hohlraum V mögen N Oszillatoren irgendwie verteilt sein. Die Emissionsbewegung des $\varkappa$ten Oszillators denken wir uns harmonisch mit unendlich langer Grundperiode (Fouriersches Integral) aufgelöst zu

$$\int_0^\infty a_\varkappa(\nu)\, e^{-2i\pi\nu t}\, d\nu \qquad [a_\varkappa(\nu) \text{ komplex}].$$

Dann beobachtet man in einem Punkt $P_{\xi\eta}$ auf einer den Hohlraum durchsetzenden $\xi\eta$-Ebene die zur Schwingungszahl ν gehörige harmonische Komponente

$$A(\nu, \xi, \eta) = \sum\nolimits_\varkappa \frac{a_\varkappa(\nu)\, c_\varkappa}{r_{\varkappa\xi\eta}}\, e^{-2i\pi\nu(t - r_{\varkappa\xi\eta}/c)}, \tag{2}$$

1) W. Ritz, Physik. Zeitschr. **9.** p. 903. 1908. Vgl. ferner A. Einstein, l. c. **10.** p. 185. 1909; W. Ritz, **10.** p. 224. 1909; A. Einstein u. W. Ritz, **10.** p. 323. 1909.

falls $\mathfrak{c}_\varkappa$ den Richtungskosinus zwischen Schwingungs- und beobachteter Polarisationsrichtung angibt. Die Funktion $A(\nu, \xi, \eta)$ entwickeln wir über einem Farbenintervall

$$\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2} \text{ bis } \nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}$$

und über einem rechteckigen Gebiet $\Delta f = \Delta\xi \,.\, \Delta\eta$

$$\xi_0 - \frac{\Delta\xi}{2} \text{ bis } \xi_0 + \frac{\Delta\xi}{2} \quad \text{und} \quad \eta_0 - \frac{\Delta\eta}{2} \text{ bis } \eta_0 + \frac{\Delta\eta}{2}$$

zu der Fourierschen Reihe

$$(3) \qquad A(\nu, \xi, \eta) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_p \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_q G_{spq}\, e^{2i\pi\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu}s + \frac{\xi-\xi_0}{\Delta\xi}p + \frac{\eta-\eta_0}{\Delta\eta}q\right)},$$

wobei der Fourierkoeffizient G_{spq} den Wert erhält:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} G_{spq} &= \frac{1}{\Delta\nu\,\Delta\xi\,\Delta\eta} \int_{\nu_0-\frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0+\frac{\Delta\nu}{2}} d\nu \int_{\xi_0-\frac{\Delta\xi}{2}}^{\xi_0+\frac{\Delta\xi}{2}} d\xi \int_{\eta_0-\frac{\Delta\eta}{2}}^{\eta_0+\frac{\Delta\eta}{2}} d\eta \\ &\quad \times A(\nu, \xi, \eta)\, e^{-2i\pi\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu}s + \frac{\xi-\xi_0}{\Delta\xi}p + \frac{\eta-\eta_0}{\Delta\eta}q\right)}. \end{aligned} \right.$$

Im Exponenten von (2) können wir schreiben

$$(5) \qquad r_{\varkappa\xi\eta} = r_\varkappa + (\xi - \xi_0)\,\alpha_\varkappa + (\eta - \eta_0)\,\beta_\varkappa$$

falls $r_\varkappa$ die Entfernung des $\varkappa$ten Oszillators von der *Mitte* von Δf angibt, und wenn $\alpha_\varkappa$ und $\beta_\varkappa$ die Richtungskosinusse der Verbindungen des Oszillators mit zwei anderen auf Δf liegenden Punkten sind, die um so näher von der Mitte liegen, je kleiner die Ausmessungen von Δf gegen $r_\varkappa$ sind. Dann wird aus (4) bei Einsetzung von (2), (5)

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} G_{spq} &= \sum\nolimits_\varkappa \frac{\mathfrak{c}_\varkappa}{\Delta\xi\,\Delta\eta\,\Delta\nu} \int a_\varkappa(\nu)\, d\nu \int d\xi \int d\eta \\ &\quad \times \frac{1}{r_{\varkappa\xi\eta}} \cdot e^{-2i\pi\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu}s + \nu t - \frac{\nu}{c}r_\varkappa\right)} \cdot e^{-2i\pi\frac{\xi-\xi_0}{\Delta\xi}\left(p - \alpha_\varkappa\frac{\nu\,\Delta\nu}{c}\right)} \\ &\quad \cdot e^{-2i\pi\frac{\eta-\eta_0}{\Delta\eta}\left(q - \beta_\varkappa\frac{\nu\,\Delta\eta}{c}\right)}. \end{aligned} \right.$$

Im Nenner setzen wir statt der mit $\xi\eta$ veränderlichen Größe $r_{\varkappa\xi\eta}$ eine mittlere Entfernung $\overline{r_\varkappa}$ des $\varkappa$ten Oszillators von den

Punkten des Flächenelementes Δf vor das Integralzeichen, ebenso statt der mit ν veränderlichen Größe $a_\varkappa(\nu)$ eine mittlere Größe $\overline{a_{\varkappa\nu}}$. In den Exponenten kann statt der mit $\Delta\xi$ bzw. $\Delta\eta$ multiplizierten Variablen ν ein mittlerer konstanter Wert gesetzt werden. Dadurch wird

$$G_{spq} = \sum_\varkappa \frac{\overline{a_{\varkappa\nu}}\, c_\varkappa}{r_\varkappa} e^{-2i\pi\nu_0(t-r_\varkappa/c)} \cdot \frac{1}{\Delta\nu}\int_{\nu_0-\frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0+\frac{\Delta\nu}{2}} d\nu\, e^{-2i\pi\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu}\left(s+t\Delta\nu-\frac{\Delta\nu}{c}r_\varkappa\right)}$$

$$\cdot \frac{1}{\Delta\xi}\int_{\xi_0-\frac{\Delta\xi}{2}}^{\xi_0+\frac{\Delta\xi}{2}} d\xi\, e^{-2i\pi\frac{\xi-\xi_0}{\Delta\xi}\left(p-\frac{\nu\Delta\xi}{c}\alpha_\varkappa\right)} \cdot \frac{1}{\Delta\eta}\int_{\eta_0-\frac{\Delta\eta}{2}}^{\eta_0+\frac{\Delta\eta}{2}} d\eta\, e^{-2i\pi\frac{\eta-\eta_0}{\Delta\eta}\left(q-\frac{\nu\Delta\eta}{c}\beta_\varkappa\right)},$$

oder nach Ausführung der Integrationen

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} G_{spq} = \sum_\varkappa \frac{\overline{a_{\varkappa\nu}}\, c_\varkappa}{r_\varkappa} e^{-2i\pi\nu_0(t-r_\varkappa/c)} \cdot \frac{\sin\pi\left(s+t\Delta\nu-\frac{\Delta\nu}{c}r_\varkappa\right)}{\pi\left(s+t\Delta\nu-\frac{\Delta\nu}{c}r_\varkappa\right)} \\ \cdot \frac{\sin\pi\left(p-\frac{\nu\Delta\xi}{c}\alpha_\varkappa\right)}{\pi\left(p-\frac{\nu\Delta\xi}{c}\alpha_\varkappa\right)} \cdot \frac{\sin\pi\left(q-\frac{\nu\Delta\eta}{c}\beta_\varkappa\right)}{\pi\left(q-\frac{\nu\Delta\xi}{c}\beta_\varkappa\right)}. \end{aligned} \right.$$

$$(7')\quad G_{spq} = \sum_\varkappa M(\varkappa) \times \varphi(\varkappa, s) \times \chi(\varkappa, p) \times \psi(\varkappa, q),$$

worin die Faktoren φ, χ, ψ die Form $\sin\varkappa : \varkappa$ haben.

Zu diesem Ausdruck G_{spq} trägt jeder Oszillator $\varkappa$ mit einem Glied $M_\varkappa$ bei, welches noch mit den vom Index spq abhängenden Faktoren $\varphi_{\varkappa s}\chi_{\varkappa p}\psi_{\varkappa q}$ multipliziert ist. Um G_{spq} zu diskutieren, wollen wir den ganzen Raum um das Flächenelement $\Delta\xi\,\Delta\eta$ herum durch die

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\text{Kugelschar} \quad r^{(s)} = \frac{c}{\Delta\nu}s + ct \\ &\text{und die beiden} \\ &\text{Kegelscharen } \alpha^{(p)} = \frac{c}{\nu\Delta\xi}p,\ \beta^{(q)} = \frac{c}{\nu\Delta\eta}q \\ &\qquad (s, p, q = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \pm\infty), \end{aligned} \right.$$

in *Fächer* einteilen, welche um so kleiner ausfallen, je größer $\Delta\nu$, $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ sind. An jeder Ecke eines Faches stoßen drei

der Flächen (8) zusammen, so daß die Fachecken ein System von Gitterpunkten $s\,p\,q$ bilden und zu jedem Gitterpunkt $s\,p\,q$ ein G_{spq} gehört. Mit Bezug auf einen Oszillator $\varkappa$ mit den Raumkoordinaten $r_\varkappa\,\alpha_\varkappa\,\beta_\varkappa$ lassen sich die Gitterpunkte $s\,p\,q$ ordnen in *Schalen*, welche den Oszillator $\varkappa$ umgeben: Die erste Schale besteht aus 2^3 Gitterpunkten, nämlich den acht Ecken des den Oszillator *selbst* enthaltenden Faches; die zweite Schale besteht aus 4^3-2^3, die dritte Schale aus $6^3-(4^3-2^3)$ Gitterpunkten usw. Der Beitrag $M_\varkappa\,\varphi_{\varkappa s}\,\chi_{\varkappa p}\,\psi_{\varkappa q}$ des $\varkappa$ten Oszillators zu einem G_{spq} ist nun um so *kleiner*, je größer die Nenner

$$s + t\,\Delta v - \frac{\Delta v}{c} r_\varkappa, \quad p - \frac{\nu\,\Delta\xi}{c}\alpha_\varkappa, \quad q - \frac{\nu\,\Delta\eta}{c}\beta_\varkappa,$$

von $\varphi\,\chi\,\psi$ sind. Der Oszillator $\varkappa$ trägt also am meisten zu denjenigen G_{spq} bei, die zu den 8 Gitterpunkten der *ersten* Schale gehören, und sein Beitrag zu einem anderen G_{spq} ist um so kleiner, je größer die Zahl der zwischen dem Punkt $s\,p\,q$ und dem Oszillator gelegenen Schalen ist. Der Beitrag $M_\varkappa\,\varphi_{\varkappa s}\,\chi_{\varkappa p}\,\psi_{\varkappa q}$ *der* Gitterpunkte, welche die $m$te den Oszillator $\varkappa$ umgebende Schale bilden, sinkt mit wachsendem m unter jede beliebige Grenze. Vergrößert man andererseits $\Delta v, \Delta\xi, \Delta\eta$ hinreichend, so wird das Netzwerk der Gitterpunkte engmaschiger. Dabei bleibt zwar die *Anzahl* der zu beträchtlichen G_{spq} Anlaß gebenden Gitterpunkte unverändert; dagegen wird das *Raumgebiet*, in welchem die wesentlich beitragenden Gitterpunkte liegen, beliebig nahe an den Oszillator herangedrängt; d. h. die *Einflußsphäre* jedes Oszillators auf die G_{spq} läßt sich durch Vergrößerung von Δv, $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ *räumlich* beliebig verkleinern, während die *Zahl* der in der Einflußsphäre liegenden Gitterpunkte unverändert bleibt. Liegen nun Oszillatoren in einem gegebenen Volumelement r bis $r+dr$, α bis $\alpha+d\alpha$, β bis $\beta+d\beta$

$$(9) \qquad dV = r\,dr\,d\Omega = r\,dr\,\frac{d\alpha\,d\beta}{\cos\theta} \quad (\gamma = \cos\Theta),$$

so sind die in dV liegenden Gitterpunkte $s\,p\,q$ eingeschlossen in den Grenzen:

$$(10)\begin{cases} -t\,\Delta v + \frac{\Delta v}{c} r < s < -t\,\Delta v + \frac{\Delta v}{c}(r+dr), \\ \frac{\nu\,\Delta\xi}{c}\alpha < p < \frac{\nu\,\Delta\xi}{c}(\alpha+d\alpha), \quad \frac{\nu\,\Delta\eta}{c}\beta < q < \frac{\nu\,\Delta\eta}{c}(\beta+d\beta), \end{cases}$$

und man hat innerhalb dV im ganzen

$$(11) \quad \Delta z = \frac{\Delta \nu}{c} dr \frac{\nu \Delta \xi}{c} d\alpha \cdot \frac{\nu \Delta \eta}{c} d\beta = \frac{\nu^2}{c^3} dr \, \Delta \nu \, \Delta f \, d\Omega \cos\Theta,$$

Gitterpunkte $s\,p\,q$. Durch Vergrößerung von dV oder von $\Delta\nu\,\Delta f$, d. h. durch Vergrößerung von Δz, läßt sich nun erreichen, daß das Gebiet, welches von den Einflußsphären der in dV liegenden Oszillatoren eingenommen wird, relativ beliebig wenig über den Rand von dV hinausragt. Behauptet man also, daß die G_{spq} *aller* außerhalb dV liegenden Gitterpunkte $s\,p\,q$ von allen innerhalb dV liegenden Oszillatoren $\varkappa$ verschwindend kleine Beiträge $M_\varkappa \varphi_{\varkappa s} \chi_{\varkappa p} \psi_{\varkappa q}$ erhalten, so begeht man einen um so kleineren relativen Fehler, je kleiner die Einflußsphären der einzelnen Oszillatoren im Verhältnis zu dem ganzen den Oszillatoren zur Verfügung stehenden Raum dV sind, d. h. je größer die Zahl Δz (11) gegen Eins wird.

Sind also Oszillatoren nur innerhalb dV vorhanden, so werden im Grenzfall

$$(12) \qquad \Delta z \gg 1$$

alle G_{spq}, die zu außerhalb dV gelegenen Gitterpunkten $s\,p\,q$ gehören, von vornherein verschwinden. Übrig bleiben nur *die* Δz G_{spq}-Werte, deren Gitterpunkte innerhalb dV liegen, deren $s\,p\,q$ also in den Intervallen (10) eingeschlossen sind. Man hat also das *Resultat*:

Die in einem Volumteil $dV = r\,dr\,d\Omega$ verteilten Oszillatoren bringen auf einem unter dem Einfallswinkel Θ gelegenen Flächenstück Δf im Farbenintervall $\Delta\nu$ eine Lichterregung hervor, die wegen (10) beschrieben wird durch höchstens

$$(13) \qquad \Delta z = \frac{\nu^2}{c^3} \Delta f \, \Delta \nu \, dr \, d\Omega \cos\Theta \qquad (\text{falls } \Delta z \gg 1),$$

nicht verschwindende Fourierkoeffizienten G_{spq}, während die übrigen G_{spq} von vornherein verschwinden, unabhängig von der *Zahl* der in dem Volumteil enthaltenen Oszillatoren. — Jedes von Null verschiedene G_{spq} verdankt sein Nichtverschwinden der Existenz von Oszillatoren in einer bestimmten Raumgegend; es tragen nämlich alle *die* Oszillatoren $\varkappa$ zu dem betreffenden G_{spq} merklich bei, deren Einflußsphären den Gitterpunkt $s\,p\,q$ enthalten.

§ 2. Die Freiheitsgrade des Hohlraums.

Hat man leuchtende Oszillatoren in mehreren Volumteilen, so setzt sich G_{spq} (7') einfach additiv aus den Beiträgen der einzelnen Volumteile zusammen, und es verschwinden wieder alle *die* G_{spq} von vornherein, deren Gitterpunkte $s\,p\,q$ außerhalb des von Oszillatoren eingenommenen Gebietes V liegen. Dadurch ist der Strahlungszustand in den Intervallen Δf, $\Delta \nu$ auf *Emissionen von Oszillatoren* zurückgeführt (an Stelle der Zurückführung auf Eigenschwingungen des Hohlraumes [Jeans] oder auf Strahlenbündel [v. Laue]), und die Zahl der Bestimmungsstücke der Strahlung auf Δf, $\Delta \nu$ hängt nicht von der Zahl der Oszillatoren ab, sondern von dem Voluminhalt des den Oszillatoren zur Verfügung stehenden Gebietes dar. Der eingangs erwähnte Widerspruch ist dadurch gelöst.

Um die Zahl der Bestimmungsstücke der ganzen Strahlung zu berechnen, wenn die Oszillatoren ein Raumgebiet V erfüllen, betrachte man[1]) eine beliebige Ebene f, welche ein von Oszillatoren erfülltes Raumgebiet V eventuell in mehreren nicht zusammenhängenden Stücken durchsetzt. f denken wir uns aus lauter Stücken Δf zusammengesetzt, so daß $f = \Sigma \Delta f$. Durch jedes Δf legen wir, als Achse eines Kegels der Öffnung $d\Omega$, in der festen Richtung Ω eine Gerade, welche mit der Normalen von Δf den Einfallswinkel Θ bildet. Den innerhalb V verlaufenden Teil R dieser Geraden denken wir aus lauter Stücken dr zusammengesetzt, so daß $\Sigma\, dr = R$. Summieren wir jetzt in (13) über sämtliche Stücke dr der zu einem Δf gehörigen Geraden R und dann über sämtliche zu f gehörigen Stücke Δf, so wird

$$\sum_R \sum_f dr\, \Delta f \cos \Theta = V;$$

also ist wegen (13)

$$\frac{\nu^2}{c^3}\, d\,\Omega\, V\, \Delta \nu.$$

die Zahl der Fourierkoeffizienten G_{spq}, welche die Beleuchtung der ganzen Ebene f durch sämtliche Oszillatoren mit Farben $\Delta \nu$ beschreibt, soweit diese aus der Kegelöffnung $d\Omega$ um die feste Richtung Ω auf die einzelnen Stücke Δf strahlen. Läßt man *alle* Einfallswinkel zu, so tritt 4π an die Stelle

1) Vgl. M. v. Laue, Ann. d. Phys. **44.** p. 1200. 1914.

von $d\Omega$. Beachtet man schließlich, daß in jedem komplexen Fourierkoeffizienten G_{spq} *zwei* Angaben (Amplitude und Phase) enthalten sind, so findet man die Jeanssche Zahl

$$dZ = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V d\nu, \tag{14}$$

als Zahl der unabhängigen Angaben, welche den Strahlungszustand auf einer beliebigen durch V gelegten Ebene f im Intervall $d\nu$ beschreiben. Da nach Bestimmung der dZ Zustandsgrößen auf der Ebene f der Zustand in jedem anderen Punkt des Volumens V ohne neue Angaben mitbestimmt ist, falls passende Randbedingungen, etwa spiegelnde Wände, vorgeschrieben sind, so ist dZ als *Zahl der Freiheitsgrade* des Raumes V im Intervall $d\nu$ anzusprechen. Alle übrigen Freiheitsgrade sind von vornherein ausgeschlossen, da ihre Energien gegen die der dZ Freiheitsgrade um so mehr verschwinden, je größer dZ gegen 1 ist:

$$dZ \gg 1. \tag{12}$$

Die Bedingung (12) ist übrigens auch die Voraussetzung der Untersuchungen von Jeans, Weyl und v. Laue über die Freiheitsgrade der Hohlraumstrahlung.

II. Teil.

Zu einem ähnlichen Resultat gelangt man durch eine Methode, die sich auf die *Schwankungen* der spektralen und der räumlichen Energieverteilung gründet. Man kann nämlich fragen, ob bei der fortwährend schwankenden Energieverteilung im Spektrum alle *Farben* wirklich unabhängig voneinander sind, oder ob nicht bei gegebener Intensität der Farbe ν im selben Augenblick die Intensität einer benachbarten Farbe $\nu + \Delta\nu$ mehr oder weniger mitbestimmt ist; ebenso, ob nicht die Intensitätsschwankungen an benachbarten *Raum*punkten in jedem Augenblick irgendwie verknüpft sind. Wir werden nun finden, daß bei den fortwährenden räumlichen und spektralen Intensitätsschwankungen zwei benachbarte Stellen des Raumes und des Spektrums wahrscheinlichkeitstheoretisch um so abhängiger voneinander sind, je näher sie beieinander liegen, so daß sich, bis auf einen unbestimmten Zahlenfaktor, ein *kritisches Raumintervall* und ein *kritisches Farbenintervall* feststellen läßt, innerhalb dessen Abhängigkeit,

außerhalb dessen Unabhängigkeit besteht. Dadurch gelingt es, den Raum und das Spektrum in voneinander unabhängig schwankende Elementarbereiche zu zerlegen, deren Anzahl bis auf jenen unbestimmten Faktor mit der Jeansschen Zahl (1) der Freiheitsgrade übereinstimmt. Die kritischen Intervalle sind übrigens identisch mit den kritischen Grenzen des harmonischen und optischen Auflösungsvermögens, welche beide auch nur bis auf einen unbestimmten Faktor definiert sind.

§ 3. Schwankungen der spektralen Intensitätsverteilung.

Der Beobachtungspunkt P werde bestrahlt von n Oszillatoren, welche in der Entfernung

$$r - \frac{dr}{2} \quad \text{bis} \quad r + \frac{dr}{2}$$

von P innerhalb eines körperlichen Winkels $d\Omega$ liegen, also ein Volumelement $r\,d\Omega\,dr$ erfüllen. Die Schwingung des $\varkappa$ten Oszillators werde nach Fourier mit einer Grundperiode $2T$ dargestellt durch

$$(1) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s\, a_{\varkappa s}\, e^{-i\frac{\pi s t}{T}} \qquad (a_{\varkappa s} \text{ komplex}).$$

Ist dann $t_\varkappa$ die Lichtzeit vom $\varkappa$ten Oszillator zum Punkt P $t_\varkappa = r_\varkappa/c$, und bedeutet $\mathfrak{c}_\varkappa$ den Kosinus der Schwingungsrichtung des $\varkappa$ten Oszillators gegen die in P beobachtete Polarisationsrichtung, so wird die Lichterregung in P dargestellt durch

$$(2) \qquad \sum_1^n{}_\varkappa \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s \frac{a_{\varkappa s}\,\mathfrak{c}_\varkappa}{r_\varkappa}\, e^{-i\frac{\pi s}{T}(t-t_\varkappa)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s\, e^{-i\frac{\pi s}{T}t} \sum_1^n{}_\varkappa \frac{a_{\varkappa s}\,\mathfrak{c}_\varkappa}{r_\varkappa}\, e^{+i\frac{\pi s}{T}t_\varkappa},$$

wobei die Schwingung $\nu = s/2T$ den Amplituden-Phasenfaktor

$$(3) \qquad A_s = \sum_1^n{}_\varkappa \frac{a_{\varkappa s}\,\mathfrak{c}_\varkappa}{r_\varkappa}\, e^{+i\frac{\pi s}{T}t_\varkappa}$$

besitzt. Bezeichnen wir mit $\tilde{z}$ die zu z konjugiert komplexe Größe, so wird die Intensität der Schwingung $\nu = s/2T$

$$(4) \qquad J_s = A_s\,\tilde{A}_s = \sum{}_\varkappa \sum{}_\mu \frac{a_{\varkappa s}\,\mathfrak{c}_\varkappa\,\tilde{a}_{\mu s}\,\mathfrak{c}_\mu}{r_\varkappa\, r_\mu}\, e^{+i\frac{\pi s}{T}(t_\varkappa - t_\mu)},$$

und, wenn $\nu' = s'/2T$ die Schwingungszahl einer anderen Fourierschwingung ist:

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} J_s \cdot J_{s'} = \sum_\varkappa \sum_\mu \sum_\varrho \sum_\sigma \frac{a_{\varkappa s}\, \mathfrak{c}_\varkappa\, \tilde{a}_{\mu s}\, \mathfrak{c}_\mu\, a_{\varrho s'}\, \mathfrak{c}_\varrho\, \tilde{a}_{\sigma s'}\, \mathfrak{c}_\sigma}{r_\varkappa \quad r_\mu \quad r_\varrho \quad r_\sigma} \\ \times e^{i\frac{\pi}{T}[s(t_\varkappa - t_\mu + t_\varrho - t_\sigma) - (s-s')(t_\varrho - t_\sigma)]}. \end{aligned} \right.$$

Nun berechnen wir, unter der Voraussetzung im Durchschnitt *gleichmäßiger* Dichteerfüllung des Volumelements $r\,d\Omega\,dr$ mit Oszillatoren, den Mittelwert $\overline{J_s}$, wenn jeder Oszillator mit *gleicher* Wahrscheinlichkeit in jeder Entfernung

$$r - \frac{dr}{2} \quad \text{bis} \quad r + \frac{dr}{2}$$

liegen kann, so daß die Zeiten $t_1 \ldots t_\varkappa \ldots t_\mu$ in einem Spielraum

$$\tau = \frac{dr}{c} \qquad \left(t_\varkappa = \frac{r}{c} + \tau_\varkappa, \quad -\frac{\tau}{2} < \tau_\varkappa < +\frac{\tau}{2}\right),$$

um $t_0 = r/c$ variieren. Dann wird in (4) der Mittelwert

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\tau^2} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} d\tau_\varkappa\, d\tau_\mu\, e^{i\frac{\pi s}{T}(\tau_\varkappa - \tau_\mu)} &= \frac{\sin^2(\pi s \tau/2T)}{(\pi s \tau/2T)^2} \quad \text{für } \varkappa \lesseqgtr \mu \\ &= 1 \qquad\qquad\qquad \text{für } \varkappa = \mu. \end{aligned} \right.$$

Nehmen wir an, daß $\nu\tau = s\tau/2T$ *groß gegen 1* ist, d. h. daß auf die Strecke dr viele Wellenlängen $\lambda = c/\nu$ fallen, so ist also der Mittelwert der Glieder $\varkappa \lesseqgtr \mu$ gegen den der Glieder $\varkappa = \mu$ zu vernachlässigen, und wir erhalten aus (4)

$$(6)\qquad \overline{J_s} = \sum_\varkappa \frac{|a_{\varkappa s}|^2\, \mathfrak{c}_\varkappa^2}{r_\varkappa^2}.$$

Sind $\nu\tau$ und $\nu'\tau$ groß gegen 1, ohne daß auch $(\nu - \nu')\tau$ groß gegen 1 zu sein braucht, so finden wir entsprechend, daß in (5) bei der Mittelung nur diejenigen Glieder stehen bleiben, für welche $\varkappa = \mu$ und $\varrho = \sigma$ ist — diese geben 1 als Mittelwert des Exponentialfaktors —, oder für welche $\varkappa = \sigma$ und $\mu = \varrho$ ist — diese geben den Mittelwert $\sin^2[\pi(s-s')\tau/2T]$: $[\pi(s-s')\tau/2T]^2$ —, so daß man aus (5) erhält:

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \overline{J_s J_{s'}} &= 1 \cdot \sum_\varkappa \sum_\varrho \frac{|a_{\varkappa s}|^2\, \mathfrak{c}_\varkappa^2\, |a_{\varrho s'}|^2\, \mathfrak{c}_\varrho^2}{r_\varkappa^2 \qquad r_\varrho^2} \\ &\quad + \frac{\sin^2[\pi(s-s')\tau/2T]}{[\pi(s-s')\tau/2T]^2} \sum_{\varkappa \lesseqgtr \mu} \sum_\mu \frac{a_{\varkappa s}\, \mathfrak{c}_\varkappa\, \tilde{a}_{\mu s}\, \mathfrak{c}_\mu\, a_{\mu s'}\, \mathfrak{c}_\mu\, \tilde{a}_{\varkappa s'}\, \mathfrak{c}_\varkappa}{r_\varkappa \quad r_\mu \quad r_\mu \quad r_\varkappa}, \\ &\text{dagegen aus (6)} \\ \overline{J_s} \times \overline{J_{s'}} &= \sum_\varkappa \sum_\varrho \frac{|a_{\varkappa s}|^2 \mathfrak{c}_\varkappa^2\, |a_{\varrho s'}|^2\, \mathfrak{c}_\varrho^2}{r_\varkappa^2 \qquad r_\varrho^2}. \end{aligned} \right.$$

Wären J_s und $J_{s'}$ voneinander ganz unabhängig, so wäre

$$\overline{J_s J_{s'}} : \overline{J_s} \times \overline{J_{s'}} = 1 .$$

In Wirklichkeit weicht aber, wegen $(s-s')/2T = \nu - \nu'$, $\tau = dr/c$, dieser Quotient um so mehr von dem „unabhängigen" Wert 1 ab, je größer in (7)

$$\sin^2 [\pi (\nu - \nu') \, dr/c] : [\pi (\nu - \nu') \, dr/c]^2 \tag{8}$$

ist. Der unabhängige Wert 1 wird beim Auseinanderrücken von ν und ν' erstmalig erreicht, wenn (8) verschwindet, d. h. bei

$$|\nu - \nu'| = c/dr ,$$

als seien die Intensitätsschwankungen an den beiden Stellen ν und ν' des Spektrums voneinander unabhängig. Bei weiter wachsender Differenz $|\nu - \nu'| > c/dr$ entfernt sich der wahre Wert $\overline{J_s J_{s'}} : \overline{J_s} \times \overline{J_{s'}}$ von dem unabhängigen Wert 1 nur noch minimal. Je nachdem man diesem Entfernen mehr oder weniger Rechnung trägt und unter δ eine mehr oder weniger die 1 übertreffende Zahl versteht, kann man

$$\delta \, . \, c/dr \tag{8'}$$

als eine Art *kritische Farbendifferenz* auffassen, derart, daß zwei Farben ν und ν' als voneinander abhängig gelten, wenn $|\nu - \nu'| < \delta \, c/dr$, als unabhängig, wenn $|\nu - \nu'| > \delta \, c/dr$ ist. Ein Spektralbereich $\Delta \nu$ wird dadurch in

$$\frac{1}{\delta} \frac{dr}{c} \Delta \nu , \tag{9}$$

unabhängig schwankende Farbenbezirke zerlegt. Da die in den Größen $a_{\varkappa s}$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots n$; $-\infty < s < +\infty$) ausgedrückten speziellen Emissionseigenschaften der Oszillatoren und auch ihre Anzahl n aus dem Ergebnis herausfallen, hat man das *Resultat*:[1])

Ein gleichmäßig dicht mit Oszillatoren erfülltes Volumelement $r \, d\Omega \, dr$ gibt im Aufpunkt $r = 0$ ein Spektrum, in welchem die Intensitäten zweier Farben ν und ν' im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung um so unabhängiger von-

1) Dasselbe Resultat in anderer Einkleidung vgl. M. v. Laue, Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine Anwendung auf die Strahlungstheorie, Ann. d. Phys. **47**. p. 853. 1915.

einander schwanken, je größer $|\nu - \nu'| d r/c$ gegen 1 ist, unabhängig von der Zahl und den speziellen Eigenschaften der Oszillatoren. Daraus leitet sich eine Einteilung des im Aufpunkt beobachteten Spektralintervalls $\Delta \nu$ in

$$\frac{1}{\delta} \Delta \nu \, d r / c \tag{9}$$

Elementarbezirke unabhängiger Schwankungen ab.

§ 4. Räumliche Intensitätsschwankungen.

Wir denken uns wie in (1) die Emissionsbewegung jedes Oszillators spektral aufgelöst und betrachten in diesem Paragraphen nur die Eigenschwingungen einer einzigen Farbe $\nu = c/\lambda$, $k = 2\pi/\lambda$. Ist wieder $r_\varkappa$ die Entfernung des $\varkappa$ten Oszillators von P, $r'_\varkappa$ die von einem benachbarten Punkt P', so wird die Lichterregung in P bzw. P' bis auf den Faktor $e^{-2i\pi\nu t}$ dargestellt durch

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \sum_1^n{}_\varkappa \frac{a_\varkappa \mathfrak{c}_\varkappa}{r_\varkappa} e^{i(\delta_\varkappa + k r_\varkappa)} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (\delta_\varkappa = \text{Phase}), \\ A' &= \sum_1^n{}_\varkappa \frac{a_\varkappa \mathfrak{c}_\varkappa}{r'_\varkappa} e^{i(\delta_\varkappa + k r'_\varkappa)}. \end{aligned} \right. \tag{10}$$

$$J = A \tilde{A} = \sum{}_\varkappa \sum{}_\mu \frac{a_\varkappa \mathfrak{c}_\varkappa \tilde{a}_\mu \mathfrak{c}_\mu}{r_\varkappa \; r_\mu} e^{i(\delta_\varkappa - \delta_\mu) + ik(r_\varkappa - r_\mu)}$$

$$J J' = A \tilde{A} A' \tilde{A}' = \sum{}_\varkappa \sum{}_\mu \sum{}_\varrho \sum{}_\sigma \frac{a_\varkappa \mathfrak{c}_\varkappa \tilde{a}_\mu \mathfrak{c}_\mu \, a_\varrho \mathfrak{c}_\varrho \, \tilde{a}_\sigma \mathfrak{c}_\sigma}{r_\varkappa \; r_\mu \; r_{\varrho'} \; r_{\sigma'}}$$
$$e^{i(\delta_\varkappa - \delta_\mu + \delta_\varrho - \delta_\sigma) + ik(r_\varkappa - r_\mu + r_{\varrho'} - r_{\sigma'})}.$$

Geht man zu Mittelwerten über viele Phasenverteilungen δ über, so bleiben in $\overline{J}$ nur die Summenglieder mit $\varkappa = \mu$ stehen, so daß

$$\overline{J} = \sum{}_\varkappa \frac{|a_\varkappa|^2 \mathfrak{c}_\varkappa^2}{r_\varkappa^2} \tag{11}$$

wird. In $\overline{JJ'}$ bleiben nur die Summenglieder stehen, bei welchen $\varkappa = \mu$ und $\varrho = \sigma$ ist — diese geben den Exponentialfaktor $e^0 = 1$ —, und die Glieder, bei denen $\varkappa = \sigma$ und $\mu = \varrho$ ist — diese geben den Faktor $e^{ik[(r_\varkappa - r_\varkappa') - (r_\mu - r_\mu')]}$. Also wird

$$(12)\begin{cases} \overline{JJ'} = \sum_{\varkappa}\sum_{\varrho}\frac{|a_\varkappa|^2\mathfrak{c}_\varkappa^2\,|a_\varrho|^2\mathfrak{c}_\varrho^2}{r_\varkappa^2\quad r_\varrho'^2} \\ \qquad + \sum_{\varkappa}\sum_{\mu}{}_{\varkappa\lesseqgtr\mu}\frac{|a_\varkappa|^2\mathfrak{c}_\varkappa^2\,|a_\mu|^2\mathfrak{c}_\mu^2}{r_\varkappa r_\varkappa'\quad r_\mu r_\mu'}\,e^{ik[(r_\varkappa-r_{\varkappa'})-(r_\mu-r_{\mu'})]}\,. \\ \text{Dagegen nach (11)} \\ \overline{J} = \overline{J'} = \sum_{\varkappa}\sum_{\varrho}\frac{|a_\varkappa|^2\mathfrak{c}_\varkappa^2\,|a_\varrho|^2\mathfrak{c}_\varrho^2}{r_\varkappa^2\quad r_\varrho'^2}\,. \end{cases}$$

Die beiden Aufpunkte P und P' mögen nun auf einem Ebenenstück f liegen; P habe auf f die Koordinaten $\xi = 0$, $\eta = 0$, P' die Koordinaten $\xi\eta$. Die Mitte des Oszillatoren enthaltenden Raumelements $r\,d\Omega\,dr$ liege von P aus in der Richtung mit den Kosinussen $\alpha_0\,\beta_0\,\gamma_0$, so daß

$$(13)\qquad d\,\Omega = \frac{d\alpha\,d\beta}{\cos\Theta}$$

wird, wenn $\gamma_0 = \cos\Theta$ und Θ der Einfallswinkel zwischen der Richtung $\alpha_0\,\beta_0\,\gamma_0$ und der Flächennormalen von f ist. Die Oszillatoren mögen die um $\alpha_0\,\beta_0\,\gamma_0$ herum liegenden Richtungskosinusse $\alpha_\varkappa\,\beta_\varkappa\,\gamma_\varkappa$ haben, wobei

$$\alpha_\varkappa = \alpha_0 + \mathfrak{a}_\varkappa \quad \left(-\frac{d\alpha}{2} < \mathfrak{a}_\varkappa < +\frac{d\alpha}{2}\right),$$

$$\beta_\varkappa = \beta_0 + \mathfrak{b}_\varkappa \quad \left(-\frac{d\beta}{2} < \mathfrak{b}_\varkappa < \frac{d\beta}{2}\right).$$

Ist die Entfernung PP' klein gegen $r_\varkappa$, so wird angenähert

$$(14)\qquad r_\varkappa' - r_\varkappa = \xi\,\alpha_\varkappa + \eta\,\beta_\varkappa = (\xi\,\alpha_0 + \eta\,\beta_0) + (\xi\,\mathfrak{a}_\varkappa + \mathfrak{b}_\varkappa)\,.$$

Nimmt, unter der Voraussetzung im Durchschnitt *gleichmäßiger* Dichteerfüllung des Volumelements $r\,dr\,d\alpha\,d\beta/\cos\Theta$, jedes $\mathfrak{a}_\varkappa$ und $\mathfrak{b}_\varkappa$ mit *gleicher* Wahrscheinlichkeit jeden Wert zwischen $-d\alpha/2$ und $+d\alpha/2$ bzw. zwischen $-d\beta/2$ und $+d\beta/2$ an, so wird der Mittelwert des Exponentialfaktors (12) nach (14)

$$\frac{1}{(d\alpha\,d\beta)^2}\int_{-d\alpha/2}^{+d\alpha/2}\!\!\int\int_{-d\beta/2}^{+d\beta/2}\!\!\int e^{ik[(\xi\,\mathfrak{a}_\varkappa+\eta\,\mathfrak{b}_\varkappa)-(\xi\,\mathfrak{a}_\mu+\eta\,\mathfrak{b}_\mu)]}\,d\mathfrak{a}_\varkappa\,d\mathfrak{a}_\mu\,d\mathfrak{b}_\varkappa\,d\mathfrak{b}_\mu$$

$$= \frac{\sin^2(k\,\xi\,d\alpha/2)}{(k\,\xi\,d\alpha/2)^2}\cdot\frac{\sin^2(k\,\eta\,d\beta/2)}{(k\,\eta\,d\beta/2)}\,.$$

Daher wird aus (12) im Durchschnitt

$$(15)\quad \begin{cases} \overline{JJ'} = \sum_\varkappa \sum_\mu \frac{|a_\varkappa|^2 c_\varkappa^2 \, |a_\mu|^2 c_\mu^2}{r_\varkappa^2 \quad r_\mu'^2} \\ \quad + \frac{\sin^2(k\xi\, d\alpha/2)\sin^2(k\eta\, d\beta/2)}{(k\xi\, d\alpha/2)^2\,(k\xi\, d\beta/2)^2} \sum_\varkappa \sum_{\varkappa \lesseqgtr \mu}{}' \frac{|a_\varkappa|^2 c_\varkappa^2 \, |a_\mu|^2 c_\mu^2}{r_\varkappa r_\varkappa' \quad r_\mu r_\mu'}, \\ \overline{J} \times \overline{J'} = \sum_\varkappa \sum_\mu \frac{|a_\varkappa|^2 c_\varkappa^2 \, |a_\mu|^2 c_\mu^2}{r_\varkappa^2 \quad r_\mu'^2}. \end{cases}$$

Wären J und J' voneinander ganz unabhängig, so wäre

$$\overline{JJ'} : \overline{J} \times \overline{J'} = 1.$$

In Wirklichkeit weicht aber nach (15) dieser Quotient um so mehr von dem „unabhängigen Wert" 1 ab, je größer

$$(16)\qquad \frac{\sin^2(k\xi\, d\alpha/2)}{(k\xi\, d\alpha/2)^2} \; \frac{\sin^2(k\eta\, d\beta/2)}{(k\eta\, d\beta/2)^2}$$

ist. Der unabhängige Wert 1 wird, falls $P'(\xi, \eta)$ von $P(0, 0)$ abrückt, erstmalig erreicht wenn (16) verschwindet, d. h. auf dem Quadratrand

$$|\xi| = \frac{2\pi}{k\, d\alpha} = \frac{\lambda}{d\alpha}, \qquad |\eta| = \frac{2\pi}{k\, d\beta} = \frac{\lambda}{d\beta},$$

als seien die Intensitätsschwankungen in P und P' voneinander unabhängig. Bei weiter wachsendem Abstand PP' weicht der wahre Wert $\overline{JJ'} : \overline{J} \times \overline{J'}$ nur noch minimal von dem „unabhängigen" Wert 1 ab. Je nachdem man dieser Abweichung mehr oder weniger Rechnung trägt, und unter ε eine mehr oder weniger die 1 übertreffende Zahl versteht, kann

$$(16')\qquad \varepsilon^2 \frac{\lambda}{d\alpha} \cdot \frac{\lambda}{d\beta} = \varepsilon^2 \frac{c^2}{\nu^2\, d\Omega \cos\Theta}$$

als eine Art *kritischer Flächenbezirk* angesprochen werden, derart, daß die Beleuchtung in zwei Punkten $P(0, 0)$ und $P'(\xi, \eta)$ als voneinander abhängig gilt, wenn

$$|\xi| < \varepsilon \frac{\lambda}{d\alpha}, \qquad |\eta| < \varepsilon \frac{\lambda}{d\beta},$$

als unabhängig, wenn

$$|\xi| > \varepsilon \frac{\lambda}{d\alpha}, \qquad |\eta| > \varepsilon \frac{\lambda}{d\beta}$$

ist. Ein Ebenenstück Δf wird dadurch in

$$(17) \qquad \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta f \frac{d\alpha\, d\beta}{\lambda^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu^2}{c^2} \Delta f\, d\Omega \cos\Theta$$

unabhängig schwankende Elementarbezirke zerlegt.

Wir haben also das *Resultat*:[1])

Wird ein Ebenenstück aus der Einfallsrichtung Θ her von Oszillatoren beleuchtet, welche im Durchschnitt mit gleichmäßiger Dichte ein Volumelement $r\, d\Omega\, dr$ erfüllen, so sind die Intensitätsschwankungen in zwei Punkten $P'(\xi, \eta)$ und $P\,(0,0)$ der Fläche im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung um so unabhängiger voneinander, je größer

$$\frac{k\,\xi\, d\alpha}{2\pi} \cdot \frac{k\,\eta\, d\beta}{2\pi} = \xi\,\eta \frac{\nu^2}{c^2}\, d\,\Omega \cos\Theta$$

gegen 1 ist, unabhängig von der Zahl und den speziellen Eigenschaften der Oszillatoren. Daraus leitet sich eine Einteilung des Ebenenstückes Δf in

$$(17) \qquad \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu^2}{c^2} \Delta f\, d\,\Omega \cos\Theta$$

unabhängig schwankende Elementarbezirke ab.

Durch Multiplikation von (17) mit (9) erhält man

$$(18) \qquad \frac{1}{\delta\,\varepsilon^2} \frac{\nu^2}{c^3}\, d\,r\, d\,\Omega \cos\Theta\, \Delta f\, \Delta\nu$$

als Gesamtzahl der unabhängig schwankenden Elementarbezirke, welche die in einem Volumelement $r\, d\Omega\, dr$ gleichmäßig dicht verteilten Oszillatoren auf einem Ebenenstück Δf im Farbintervall $\Delta\nu$ aus der Einfallsrichtung Θ her hervorbringen, *unabhängig von der Zahl und den speziellen Eigenschaften der Oszillatoren.* Die Zahl (18) der unabhängigen Elementarbereiche von $\Delta f\,.\,\Delta\nu$ stimmt bis auf den unbestimmten Faktor $1/\delta\,\varepsilon^2$ überein mit der Zahl Δz in Gleichung 13, Teil I, für die Zahl der unabhängigen Angaben zur Beschreibung des Zustandes auf $\Delta f\,.\,\Delta\nu$.

Der unbestimmte Zahlenfaktor $1/\delta\,\varepsilon^2$ in (18) trägt dem Umstand Rechnung, daß zwei Stellen des Spektrums bzw.

---

1) Dasselbe Resultat in anderer Einkleidung vgl. A. Landé, Zur Theorie der Helligkeitsschwankungen, Physik. Zeitschr. **15.** p. 946. 1914.

des Raumes auch dann noch nicht in ihren Schwankungen ganz unabhängig sind, wenn ihre Entfernung das kritische Intervall (8′) bzw. (16′) übertrifft, und daß andererseits auch bei unterkritischer Entfernung ein gewisses Maß von Unabhängigkeit besteht.

Die kritische Entfernung (16′) $|\xi - \xi'| = \varepsilon\,\lambda/d\alpha$ unabhängiger Schwankungen bei Beleuchtung zweier Punkte aus dem Winkel $d\alpha$ ist übrigens identisch mit der Grenze ihrer *optischen Auflösbarkeit,* die ebenfalls nur bis auf einen unbestimmten Zahlenfaktor definiert ist.[1]) Analog führt das kritische Farbenintervall (8′)

$$|\nu - \nu'| = \delta\,\frac{c}{dr} = \delta/\tau$$

zu einer „Grenze der *harmonischen Auflösbarkeit*", d. i. einer minimalen Schwingungszahldifferenz $|\nu - \nu'|$, welche zwei benachbarte Farben nicht unterschreiten dürfen, wenn sie *während einer vorgegebenen Zeit* τ aufgelöst werden sollen; oder auch dem Reziproken einer minimalen Zeit τ, welche zur Analyse eines vorgegebenen Farbenakkords ν, ν' nötig ist: $\tau = \delta/|\nu - \nu'|$.[2])

Zusammenfassung.

I. Teil. Die Strahlung, welche eine Wolke von Oszillatoren $\varkappa$ auf einem Flächenelement $\Delta f = \Delta\xi \,.\, \Delta\eta$ der $\xi\eta$-Ebene im Farbenintervall $\Delta\nu = c\Delta\lambda/\lambda^2$ hervorbringt, wird in die Fouriersche Reihe

$$A(\nu, \xi, \eta) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{s} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{p} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{q} G_{spq}\, e^{2i\pi\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu}\, s + \frac{\xi-\xi_0}{\Delta\xi}\, p + \frac{\eta-\eta_0}{\Delta\eta}\, q\right)}$$

---

1) M. v. Laue, Ann. d. Phys. **44.** p. 1197. 1914.

2) Damit ein Zusammenklang aus zwei gleichzeitig angeschlagenen Tönen ν und ν' harmonisch analysiert werden kann, darf die dafür zur Verfügung stehende Zeit τ nicht kleiner als die Schwingungsdauer $1/\nu - \nu'$ des Differenztones sein, d. h. man muß eine „Schwebung" abwarten. Zwei Tonintervalle ν_1 bis ν_1' und ν_2 bis ν_2' werden in der Musik als *gleich* bezeichnet, wenn $\nu_1 : \nu_1' = \nu_2 : \nu_2'$ ist. Die zur harmonischen Auflösbarkeit nötige Minimalzeit (Schwebungsperiode) ist also um so größer, je *tiefer* bei gleichbleibendem Tonintervall $\nu : \nu'$ die beiden Töne ν und ν' liegen.

entwickelt, wobei

$$G_{spq} = \sum_{\varkappa} \frac{\overline{a_{\varkappa\nu}\, c_\varkappa}}{\overline{r_\varkappa}}\, e^{i\vartheta_\varkappa} \cdot \frac{\sin \pi \left(s + t\,\Delta\nu - \frac{r_\varkappa}{\lambda}\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)}{\pi \left(s + t\,\Delta\nu - \frac{r_\varkappa}{\lambda}\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)}$$

$$\cdot \frac{\sin \pi \left(p - \frac{\Delta\xi}{\lambda}\,\alpha_\varkappa\right)}{\pi \left(p - \frac{\Delta\xi}{\lambda}\,\alpha_\varkappa\right)} \cdot \frac{\sin \pi \left(q - \frac{\Delta\eta}{\lambda}\,\beta_\varkappa\right)}{\pi \left(q - \frac{\Delta\eta}{\lambda}\,\beta_\varkappa\right)}$$

wird. Zu jedem Indextripel $s\,p\,q$ gehört also eine bestimmte Raumstelle r, α, β, deren umgebende Oszillatoren $r_\varkappa\, \alpha_\varkappa\, \beta_\varkappa$ den drei Faktoren der Form $\sin x/x$ zu ihren *Maximalwerten* 1 verhelfen. Im Grenzfall sehr kleiner Wellenlängen λ ist aber der Abfall von diesem Maximum 1 auf 0 räumlich so steil, daß die Größe G_{spq} nur abhängt von der Lagerungsdichte und Leuchtkraft derjenigen Oszillatoren, die sich äußerst nahe an der zu $s\,p\,q$ *zugeordneten Raumstelle maximaler* $\sin x/x$*-Faktoren* befinden. Ob also der Fourierkoeffizient G_{spq} von 0 verschieden ist, hängt nur von der *Existenz* von Oszillatoren in der Umgebung der zu $s\,p\,q$ zugeordneten Raumstelle ab, nicht von der Zahl der dortigen Oszillatoren. Sind also die Oszillatoren von vornherein alle auf einen bestimmten Raum V beschränkt, so verschwinden von vornherein alle die G_{spq}, deren Gitterpunkte $s\,p\,q$ *außerhalb* V liegen, und es ist die Zahl der überhaupt als von 0 verschieden in Betracht kommenden Bestimmungsstücke G_{spq} proportional dem für die Oszillatoren zur Verfügung stehenden Raum V, nämlich gleich der Jeansschen Zah (1). Allein aus retardierten Potentialen von Oszillatoren läßt sich also die Jeanssche Zahl der Freiheitsgrade ableiten, womit der eingangs erwähnte Widerspruch gelöst ist.

II. Teil. Einige Resultate über die Größe unabhängig schwankender Gebiete des Raumes und des Spektrums sind am Schluß der §§ 3 und 4 angegeben. Sie führen zu „kritischen" Raum- und Farbenintervallen, welche mit den Grenzen des optischen und harmonischen Auflösungsvermögens übereinstimmen.

Brest-Litowsk, Februar 1916.

(Eingegangen 1. März 1916.)