9. *Ueber die Spectralgleichung des schwarzen Körpers und des blanken Platins;* *von O. Lummer und E. Jahnke.*

1. Einleitung.

Die spectrobolometrischen Versuche von Lummer-Pringsheim[1]) über die „schwarze" Strahlung sind von M. Thiesen[2]) durch eine Formel wiedergegeben worden, aus welcher folgt, dass die Energie jeder Wellenlänge mit wachsender Temperatur über alle Grenzen wächst. Dagegen bestätigen die Versuche von Paschen[3]) und Paschen-Wanner[4]) über die schwarze Strahlung die Richtigkeit der Formel von W. Wien[5]), nach welcher die Energie jeder Wellenlänge bei wachsender Temperatur sich einer *endlichen* Grenze nähert.

Lange vorher hatte schon W. Michelson[6]) auf Grund molecularthеoretischer Vorstellungen mit Hülfe des Maxwell-Boltzmann'schen Verteilungsgesetzes eine allgemeine Spectralgleichung hergeleitet, die er durch die Langley'schen Versuche für erwiesen hielt. Auch diese sagt aus, dass die Energie jeder homogenen Strahlung mit wachsender Temperatur über alle Grenzen wächst.

Da W. Wien seine Spectralgleichung ebenfalls aus dem Maxwell'schen Gesetz herleitet, und doch zu einem principiell

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. **1.** p. 23—41 u. p. 215—235. 1899; Zeitschr. f. Instrumentenk. **19.** p. 214—215. 1899; **20.** p. 148—150. 1900.

2) M. Thiesen, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. **2.** p. 37. 1900.

3) F. Paschen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 405—420 und p. 959—976. 1899.

4) F. Paschen u. H. Wanner, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 5—11. 1899; H. Wanner, Ann. d. Phys. **2.** p. 141—157. 1900.

5) W. Wien, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin **6.** p. 55—62. 1893; Wied. Ann. **52.** p. 132—165. 1894.

6) W. Michelson, Journ. Soc. Phys.-chim. russe **19.** p. 79. 1887; Journ. de Phys. (2 ser.) **3.** p. 467—479. 1887; Phil. Mag (5) **25.** p. 425. 1888.

so verschiedenen Resultat gelangt, so stellen wir uns die Aufgabe, die von Michelson und Wien gemachten Hypothesen kritisch zu beleuchten und gleichzeitig die Frage zu beantworten, wie die Michelson'schen Hypothesen abzuändern sind, wenn sie zur Thiesen'schen Formel führen sollen. Dabei gelangen wir schliesslich zu einer allgemeinen Formel, welche die bisherigen als specielle Fälle umfasst.

2. Die Theorien von Michelson und W. Wien.

Um das Maxwell'sche Verteilungsgesetz anwenden zu können, wählt Michelson die wahrscheinlichste Verteilung der Geschwindigkeiten von durchschnittlich gleichen Amplituden zum Ausgangspunkt. Er betrachtet den schwarzen Körper als einen, bei dem die Atome verschiedener Molecüle sich beeinflussen, wie diejenigen ein und desselben Molecüls, bei dem also der Molecularverband aufgelöst ist. Indem Michelson die Atomschwingungen in unendlich kleinen elastischen Hohlkugeln vom Radius ϱ vor sich gehen lässt, führt er das Problem auf dasjenige des elastischen Stosses zurück und erhält unter Benutzung der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Beziehung:

$$\tau = \frac{4\varrho}{v}, \tag{1}$$

wo τ die Schwingungszeit der ausgesandten Welle, v die momentane Geschwindigkeit des Atoms und ϱ eine Constante bedeutet. Die dem Geschwindigkeitsbereich zwischen v und $v + dv$ entsprechende Strahlungsenergie wird proportional gesetzt der Anzahl der Atome desselben Geschwindigkeitsbereiches, also nach Maxwell:

$$(k\,m)^{3/2}\, e^{-k m v^2} v^2\, dv, \tag{2}$$

wo

$$k = \frac{2}{3}\frac{1}{\overline{m v^2}}.$$

Nach Analogie mit der kinetischen Gastheorie wird gesetzt:

$$\overline{m v^2} = \text{const.}\, T, \tag{3}$$

wo T die absolute Temperatur bedeutet.

Ausserdem setzt Michelson die Strahlungsenergie einer Function der lebendigen Kraft $\psi(v^2)$ und einer Function der Temperatur $f(T)$ proportional. Er erhält so unter Anwendung des Stefan-Boltzmann'schen Gesetzes über die Gesamtstrahlung:

$$E = C T^{3/2} \lambda^{-6} e^{-\frac{c}{\lambda^2 T}}. \tag{4}$$

Da diese Formel zu der falschen Beziehung:

$$\lambda_m^2 T = \text{const.}$$

führt, hat W. Wien unter Benutzung seines Verschiebungsgesetzes:

$$E = T^5 \varphi(\lambda . T) \tag{5}$$

die Michelson'sche Hypothese (1) in die folgende

$$\frac{\text{const.}}{v} = \sqrt{\lambda} \tag{1'}$$

abgeändert.

Ausserdem sucht W. Wien die Verwertung des Maxwell'schen Gesetzes (2) und der Hypothese (3) dadurch plausibler zu machen, dass er ein *Gas* als strahlenden Körper zu Grunde legt. Da aber das Verschiebungsgesetz (5) nur für einen schwarzen Körper gültig ist, macht W. Wien die Strahlung des Gases dadurch zu einer schwarzen, dass er es in einen Hohlraum mit vollkommen spiegelnden Wänden einschliesst. Indem W. Wien mit Michelson die ferneren Hypothesen macht, dass die Strahlungsenergie erstens einer Function der lebendigen Kraft, zweitens der Maxwell'schen Anzahl proportional ist, gelangt er zu der Formel:

$$E = C \lambda^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda T}}.^{1)} \tag{6}$$

---

1) Zu dieser Formel ist neuerdings auch Max Planck geführt worden, indem er von der elektromagnetischen Lichttheorie ausgeht und die Wechselwirkung von Resonatoren in einem von vollkommenen Spiegeln eingeschlossenen elektromagnetischen Felde berechnet. Vgl. Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1897 bis 1899; Ann. d. Phys. **1.** p. 69—122. 1900.

3. Bedenken gegen W. Wien's Theorie.

Zunächst ist gegen Wien's Deduction folgender Einwand zu erheben. Wie schon Lummer-Pringsheim[1]) betont haben, ist in einem Hohlraum mit vollkommen spiegelnden Wänden die Strahlungsintensität unabhängig von der sowohl im Raum- als im Zeitelement vorhandenen Anzahl von Molecülen gleicher Geschwindigkeiten. Hiermit verliert die Ableitung den Boden, auf dem allein die zweite Hypothese von der Maxwell'schen Anzahl anwendbar ist.

Aber auch abgesehen von diesem Einwand macht die Wien'sche Herleitung *unbewiesene Voraussetzungen.*[2]) W. Wien will mit Michelson die Strahlungsenergie proportional der Maxwell'schen „Anzahl" setzen. In Wirklichkeit wählt er sie proportional der Grösse:

$$v^2 e^{-\frac{v^2}{T}} dv, \tag{7}$$

wobei er stillschweigend den Factor const. $(k\,m)^{3/2} = T^{-3/2}$ fortlässt. Hätte W. Wien diesen Factor beibehalten, so wäre er zu der Formel gelangt:

$$E = C(\lambda T)^{-3/2} \lambda^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda T}}, \tag{8}$$

welche für $T = \infty$ die Energie zu Null werden lässt.

Vielleicht hat sich W. Wien bei seiner Herleitung durch folgenden Gedankengang leiten lassen. Das Wien'sche Ver-

---

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 1. p. 23—41. 1899. Ausführlicheres in O. Lummer's Referat „Sur le rayonnement des corps noirs", Intern. Congress zu Paris 1900.

2) Kurz vor Abschluss dieser Arbeit erschien eine Notiz Lord Rayleigh's (Phil. Mag. 49. p. 539. 1900), in der er die Folgerung der Wien'schen Formel

$$\lim_{T=\infty} E = \text{endlich}$$

trotz der Bestätigung durch die Paschen'schen Versuche für physikalisch unwahrscheinlich erklärt. Auch ihm scheint die Wien'sche Herleitung nicht zwingend, denn er sagt „viewed from the theoretical side the result appears to me to be little more than a conjecture". Er ersetzt die Wien'sche Formel durch die folgende:

$$E = C T \lambda^{-4} e^{-\frac{c}{\lambda T}}.$$

schiebungsgesetz (5) erheischt lediglich die Kenntnis der Energieverteilung für nur *eine* Temperatur, da sie dann für jede beliebige zu berechnen ist. Nun führt thatsächlich bei constantem T das Maxwell'sche Gesetz zur Energieverteilung der zu diesem T gehörigen Isotherme. Würde man demnach mit Wien vom Ausdruck (7) ausgehen, so könnte man meinen, dass seine Formel (6) die Energieverteilung für alle Isothermen wiedergiebt.

So überzeugend diese Ueberlegung auch klingt, so lässt sie sich doch nicht aufrecht erhalten. Denn man muss zum gleichen Resultat gelangen, ob man von Isotherme zu Isotherme oder von Isochromate zu Isochromate übergeht. Die Wien'sche Spectralgleichung würde die Energieverteilung allgemein nur dann darstellen, wenn man zu ihr auch gelangte, falls man von einer *Isochromate* ausginge und auf diese das Wien'sche Verschiebungsgesetz anwendete. In diesem Falle, wo die Wellenlänge constant ist, darf in dem Maxwell'schen Ausdruck $T^{-3/2}$ sicher nicht fortgelassen werden. Dann aber gelangt man, wie oben gezeigt, notwendig zur unrichtigen Gleichung (8).

4. Herleitung einer brauchbaren Spectralgleichung.

Unter Benutzung des Maxwell'schen Gesetzes und der Hypothese, dass die Energie proportional ist einer Function der lebendigen Kraft, kommt man, wie wir jetzt zeigen wollen, nur dann zu einer brauchbaren Spectralgleichung, wenn man die schon von Michelson gemachte Hypothese wieder einführt, dass die Strahlungsenergie proportional $f(T)$ ist.

Es ergiebt sich zunächst:

$$E = T^{-3/2} f(T) v^2 \psi(v^2) e^{-\frac{v^2}{T}}. \tag{9}$$

Mit Hülfe der Wien'schen Hypothese (1') wird:

$$E = T^{-3/2} f(T) F(\lambda) e^{-\frac{c}{\lambda T}}.$$

Das Wien'sche Verschiebungsgesetz führt sodann zu folgender Bestimmung der unbekannten Functionen:

$$T^{-3/2} f(T) = T^{5-\mu},$$

$$F(\lambda) = C \frac{1}{\lambda^{\mu}},$$

sodass:

$$E = C T^{5-\mu} \lambda^{-\mu} e^{-\frac{c}{\lambda T}}, \tag{10}$$

wo C und c Constanten sind und μ jede positive Zahl $\leqq 5$ bedeutet.

Diese Formel geht für $\mu = 5$ in die Wien'sche, für $\mu = 4{,}5$ in die Thiesen'sche und für $\mu = 4$ in die Rayleigh'sche über.

Da die Lummer-Pringsheim'schen Beobachtungen durch $\mu = 4{,}5$, die Paschen-Wanner'schen durch $\mu = 5$ dargestellt werden, so führen die ersteren zur Folgerung:

$$\lim_{T=\infty} E = \infty,$$

die letzteren zu der Folgerung:

$$\lim_{T=\infty} E = \text{endlich}.$$

Dieser principielle Unterschied würde verschwinden, falls es möglich wäre, die Lummer-Pringsheim'schen Versuche ebenfalls durch eine Formel darzustellen, bei der T nicht als Factor auftritt.

Thatsächlich giebt es eine solche Formel. Sie lautet:

$$E = C' T^5 (\lambda T)^{-\mu} . e^{-\frac{c'}{(\lambda T)^\nu}}.$$

Um zu ihr zu gelangen, verlassen wir zwar den Boden des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes und begnügen uns mit einer rein formalen Herleitung. Indessen muss hervorgehoben werden, dass durch die notwendige Einführung der Proportionalität von E mit $\varphi(v^2)$ und $f(T)$ auch in der Michelson-Wien'schen Ableitung der physikalische Sinn des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes verloren geht. Zu einer Moleculartheorie würde eine solche Herleitung erst dann, wenn es auf Grund mechanischer Vorstellungen gelingen würde, diese Functionen so zu bestimmen, dass sich aus der Spectralgleichung sämtliche Strahlungsgesetze deduciren lassen.

Ueber $f(T)$ lässt sich jedenfalls folgendes aussagen: Wie schon erwähnt, darf die Hypothese, dass die Strahlungsenergie proportional der Maxwell'schen Anzahl ist, auf den Kirchhoff'schen Hohlraum nicht übertragen werden. Demnach ist die geforderte Proportionalität der Strahlungsenergie mit einer

Function der Temperatur so zu deuten, dass bei einer freistrahlenden schwarzen Fläche der gegenseitige Einfluss der Atome gleicher Geschwindigkeit eine grosse Rolle spielt und zwar in dem Sinne, dass die Energie einer Welle λ um so grösser ist, je höher die Temperatur der strahlenden Fläche ist.

5. Analytische Verallgemeinerung der Spectralgleichung.

Zu unserer allgemeinen Gleichung gelangen wir, wenn wir von der Gleichung (9) ausgehen und folgende Beziehung

$$\chi(v^2, \lambda, T) = 0 \tag{11}$$

ansetzen.

Dann folgt aus (11):

$$\begin{aligned} v^2 &= \varphi_1(\lambda, T), \\ v^2 \psi(v^2) &= \varphi_2(\lambda, T), \\ E &= T^{-3/2} f(T) \varphi_2(\lambda, T) e^{-\frac{\varphi_1(\lambda, T)}{T}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Um die unbekannten Functionen φ_1 und φ_2 näher zu bestimmen, benutzen wir auch hier das Wien'sche Verschiebungsgesetz (5).

Dann können wir setzen:[1])

$$\begin{aligned} T^{-3/2} f(T) &= T^{5-r}, \\ \varphi_2(\lambda, T) &= T^r \psi_2(\lambda . T), \\ \frac{\varphi_1(\lambda, T)}{T} &= \frac{1}{\lambda T} \psi_1(\lambda . T), \end{aligned}$$

sodass

$$E = T^5 \psi_2(\lambda . T) e^{-\frac{\psi_1(\lambda T)}{\lambda T}}. \tag{13}$$

Wir wählen jetzt, um die einfachste Formel zu erhalten:

$$\begin{aligned} \psi_2(\lambda T) &= C'(\lambda T)^m, \\ \psi_1(\lambda T) &= c'(\lambda T)^{n+1}, \end{aligned}$$

wo C' und c' Constanten bezeichnen; diese sind offenbar *positiv*, C' weil sonst E negativ wäre, c weil sonst die Exponential-

1) Hierbei beschränken wir uns auf algebraische Functionen. Zwar würde $f(T)$, wollten wir zum Gesetz von H. F. Weber gelangen, eine transcendente Form annehmen. Das Weber'sche Gesetz kommt aber nicht in Betracht, da es nicht einmal das Stefan'sche Gesetz erfüllt.

function im Maxwell'schen Verteilungsgesetz einen positiven Exponenten erhielte. Alsdann ist:

$$E = C' T^5 (\lambda T)^m e^{-c' (\lambda T)^n}.$$

Um näheres über die Exponenten m und n zu erfahren, benutzen wir das Strahlungsgesetz:

$$\lambda_m T = A$$

und suchen die Bedingung des Maximums von E auf, wodurch wir erhalten:

$$(\lambda_m T)^n = \frac{m}{c' n}.$$

Diese Gleichung lehrt, dass m und n gleiches Vorzeichen haben müssen. Nun ist n negativ zu wählen, weil sonst für $T = \infty$, $E = 0$ würde; also muss auch m negativ sein. Wir setzen deshalb:

(13) $$m = -\mu, \qquad n = -\nu,$$

sodass

(14) $$(\lambda_m . T)^\nu = \frac{c' \nu}{\mu}$$

und

(15) $$E = C' T^5 (\lambda T)^{-\mu} e^{-\frac{c'}{(\lambda T)^\nu}},$$

wo

$$c' = \frac{\mu}{\nu} \left(\lambda_m T\right)^\nu,$$

$$C' = E_m T^{-5} (\lambda_m T)^\nu e^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Der analytische Charakter der gegebenen Herleitung lässt noch erkennen, dass man zu unserer Spectralgleichung auch gelangt, wenn man das Maxwell'sche Verteilungsgesetz überhaupt fallen lässt und durch die Exponentialfunction $e^{-\frac{\varphi(\lambda, T)}{T}}$ ersetzt.

Weiteren Aufschluss über die Exponenten ziehen wir aus Gleichung (10), welche in Verbindung mit (12) und (13) die Form annimmt:

(16) $$v^2 = c' \frac{T^{1-\nu}}{\lambda^\nu}.$$

Aus ihr folgt, da v für $T = 0$ nicht unendlich werden darf, dass stets

$$0 < \nu \leqq 1$$

ist.

Mit Hülfe der von Lummer-Pringsheim beobachteten Isothermen lässt sich nun zu jedem Wert des Exponenten μ der zugehörige Wert des Exponenten ν bestimmen.

Vergleicht man nämlich die den Wellenlängen λ_i entsprechenden Intensitäten E_{λ_i} mit einer und derselben Intensität E_λ und nennt den zugehörigen Proportionalitätsfactor $\varkappa_i$, so ist für jede Isotherme

$$\left[\varkappa_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)^\mu\right]^{\frac{1}{\lambda^{-\nu}-\lambda_i^{-\nu}}} = \text{const.},$$

wo sich die Constante von Temperatur zu Temperatur ändert. Aus den Versuchsdaten ergiebt sich nach diesem Verfahren z. B.

$$\text{für } \mu = 5: \quad \nu = 0{,}9$$

und

$$\text{für } \nu = 1: \quad \mu = 4{,}5.$$

Das zweite Wertepaar stimmt mit dem von M. Thiesen auf anderem Wege gefundenen Ergebnis überein, dass sich die Lummer-Pringsheim'schen Beobachtungen durch die Formel

$$E = C' T^{1/2} \lambda^{-4,5} e^{-\frac{c'}{\lambda T}},$$

oder

$$E = C' \sqrt{\lambda T}\, \lambda^{-5} e^{-\frac{c'}{\lambda T}},$$

wo

$$c' = 4{,}5\, \lambda_m T,$$

wiedergeben lassen.

Demnach erhalten wir für die beiden Exponenten die folgenden Grenzen:

$$(17) \qquad \begin{cases} 4{,}5 \leqq \mu \leqq 5, \\ 1 \quad \geqq \nu \geqq 0{,}9\,; \end{cases}$$

ihre Abhängigkeit wird dadurch angedeutet, dass die untereinander stehenden Zahlen einander *zugehörige* Werte von μ und ν darstellen.

Nur im Grenzfall $\nu = 1$ und $\mu = 4{,}5$ geht die Beziehung (16) über in die Wien'sche Hypothese:

$$v^2 = \frac{\text{const.}}{\lambda}.$$

Alle anderen Fälle verlangen die allgemeinere Beziehung (16).

Die hierauf basirte Herleitung ist rein *formaler* Natur. Immerhin liesse auch sie sich mit demselben Rechte, wie die Wien'sche, auf den Boden des Maxwell'schen Gesetzes stellen, wollte man die p. 286 von uns gegebene Deutung der Wien'schen Herleitung auch hier gelten lassen.

6. Prüfung der aufgestellten Spectralgleichungen.

Dass die Lummer-Pringsheim'schen Flussspatversuche durch die Grenzwerte der Ungleichung (17) dargestellt werden, geht aus folgender Tab. I hervor.

Tabelle I.

a) $T = 1259^0$ abs.

Wellenlänge	1	1,5	2	3	4	5	6	8 μ	
Beobachtet	76	410	645	596	395	230	140	—	Beobachtet
$\mu = 4{,}5$, $\nu = 1$	78	412	645	597	391	242	151	64	M. Thiesen
$\mu = 5$, $\nu = 0{,}9$	83	414	645	595	387	239	145	60	Lummer, Jahnke
$\mu = 5$, $\nu = 1$	61	391	645	590	369	197	126	50	W. Wien
$\mu = 4$, $\nu = 1$	96	436	645	610	422	273	180	84	Lord Rayleigh [1])

b) $T = 1646^0$ abs.

Wellenlänge	1,2	1,5	1,97	2,5	3,17	4,24	5,18 μ	
Beobachtet	185	253	264	216	144	74	42	Beobachtet
$\mu = 4{,}5$, $\nu = 1$	180	252	264	214	144	74	42,2	M. Thiesen
$\mu = 5$, $\nu = 0{,}9$	180	250	264	214	143	72	40,1	Lummer, Jahnke
$\mu = 5$, $\nu = 1$	172	259	264	209	136	65	35	W. Wien
$\mu = 4$, $\nu = 1$	191	253	264	217	154	85	52	Lord Rayleigh

1) Die Formel von Rayleigh stellt also die Versuche von Lummer-Pringsheim ebensowenig dar, wie die W. Wien'sche Formel.

7. Spectralgleichung für das blanke Platin.

Wenn wir von einem der Klasse: „Schwarzer Körper-Platin" zugehörigen Strahlungskörper wissen, dass folgende Gesetze gelten:

$$\lambda_m T = \text{const.},$$

$$E_m T^{-p} = \text{const.},$$

$$\int_0^\infty E_\lambda \, d\lambda = \text{const.}\, T^{p-1}$$

und auf seine Strahlung die beim schwarzen Körper gemachten Hypothesen übertragen, so wird seine Spectralgleichung:

$$E = C' T^{p-\mu} \lambda^{-\mu} e^{-\frac{c'}{(\lambda T)^\nu}},$$

wo μ und ν so zu bestimmen sind, dass für irgend eine Isotherme oder Isochromate die beobachtete Verteilung wiedergegeben wird.

Obige Gesetze sind thatsächlich bei blankem Platin[1]) erfüllt für $p = 6$. Nach der oben dargelegten Methode ergiebt sich dann z. B. für $\mu = 6$ der Wert $\nu = 0{,}9$ und für $\nu = 1$ der Wert $\mu = 5{,}3$.

Demnach erhalten wir folgendes Strahlungsgesetz für Platin:

$$E = C'' T^{6-\mu} \lambda^{-\mu} e^{-\frac{c''}{(\lambda T)^\nu}}, \tag{18}$$

wo:

$$c'' = \frac{\mu}{\nu} (\lambda_m T)^\nu,$$

$$C'' = E_m T^{-6} (\lambda_m T)^\nu e^{\frac{\mu}{\nu}},$$

$$5{,}3 \leqq \mu \leqq 6,$$

$$1 \geqq \nu \geqq 0{,}9.$$

Die Annäherung mit der die Beobachtungen von Lummer-Pringsheim am Platin wiedergegeben wird, ersieht man aus folgender Tab. II:

---

1) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Verhandl. d. Physik. Gesellsch. zu Berlin **17.** p. 106. 1898; O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. **1.** p. 215—235. 1900.

Tabelle II.

a) $T = 1152^0$ abs.

Wellenlänge	1,21	1,59	2,16	2,42	3,00	3,78	3,65 μ	
Beobachtet	21	58	84	83	69	48	28	Beobachtet
$\mu = 5$, $\nu = 1$	23	60	84	84	70	48	28	$T = \frac{2940}{2626} \cdot 1152^0$ abs.[1])
$\mu = 6$, $\nu = 0{,}9$	23	57	84	84	71	47	28	Lummer-Jahnke
$\mu = 5{,}3$, $\nu = 1$	22	58	84	84	71	48	29	

b) $T = 1278^0$ abs.

Wellenlänge	1,21	1,45	2,07	2,42	3	3,78	4,65 μ	
Beobachtet	64	107	156	143	110	70	44	Beobachtet
$\mu = 5$, $\nu = 1$	65	112	156	145	112	70	42	$T = \frac{2940}{2626} \cdot 1278^0$ abs.
$\mu = 6$, $\nu = 0{,}9$	64	109	156	146	111	67	38	Lummer-Jahnke
$\mu = 5{,}3$, $\nu = 1$	64	108	156	146	111	69	40	

c) $T = 1689^0$ abs.

Wellenlänge	1,01	1,55	2,2	3	3,78	4,65 μ	
Beobachtet	381	760	592	325	179	102	Beobachtet
$\mu = 5$, $\nu = 1$	419	762	592	333	172	102	$T = \frac{2940}{2626} \cdot 1689^0$ abs.
$\mu = 6$, $\nu = 0{,}9$	448	794	592	302	151	73	Lummer-Jahnke
$\mu = 5{,}3$, $\nu = 1$	442	785	592	310	161	80	

1) Wie O. Lummer u. E. Pringsheim gezeigt haben, lässt sich jede einzelne Platincurve darstellen durch die Wien'sche Formel (6), wenn man das beobachtete T ersetzt durch

$$T \cdot \frac{\lambda_m T \text{ (schwarzer Körper)}}{\lambda_m T \text{ (blankes Platin)}} = \frac{2940}{2626} T.$$

8. Resultat.

Unter richtiger Benutzung des vollständigen Maxwell'schen Verteilungsgesetzes kommen wir mit W. Wien's Hypothesen zu keiner brauchbaren Spectralgleichung. Eine solche erhalten wir erst dann, wenn wir die Strahlungsenergie ausser der Maxwell'schen Anzahl und einer Function der lebendigen Kraft noch einer Function der Temperatur proportional setzen.

Bei der einfachsten Wahl dieser Functionen ergiebt sich folgende allgemeine Spectralgleichung:

$$\text{(I)} \qquad E = C\,T^5 (\lambda\,T)^{-\mu}\, e^{-\frac{c}{\lambda T}}.$$

Aus ihr folgt die Wien'sche für $\mu = 5$, die Thiesen'sche für $\mu = 4{,}5$ und die Rayleigh'sche für $\mu = 4$.

Auf rein formalem Wege haben wir folgende allgemeinere Gleichung:

$$\text{(II)} \qquad E = C'\,T^5 (\lambda\,T)^{-\mu}\, e^{-\frac{c'}{(\lambda T)^{\nu}}}$$

erhalten und gezeigt, dass sie die Flussspatversuche von Lummer-Pringsheim durch die Wertepaare:

$$5 \geqq \mu \geqq 4{,}5,$$
$$0{,}9 \gtreqq \nu \gtreqq 1$$

gleichgut darstellt.

Für einen einzigen unter allen diesen Fällen, nämlich

$$\mu = 5 \quad \text{und} \quad \nu = 0{,}9$$

ist

$$\lim_{T=\infty} E = \textit{endlich},$$

für alle anderen

$$\lim_{T=\infty} E = \infty.$$

Insofern entscheiden auch diese Versuche nicht die principiell wichtige Frage, ob E mit T über alle Grenzen wächst oder nicht.

Folgende Anhaltspunkte scheinen dafür zu sprechen, dass

$$\lim_{T=\infty} E = \infty$$

ist. Einmal ergiebt sich der Grenzfall $\mu = 5$ und $\nu = 0{,}9$ nur unter der Beziehung:

$$v^2 = \text{const.} \frac{T^{1-\nu}}{\lambda^\nu},$$

welche zunächst nur analytische Bedeutung hat, für $\nu = 1$ aber in die Wien'sche Hypothese

$$v^2 = \frac{\text{const.}}{\lambda}$$

übergeht und damit auf den Boden des Maxwell'schen Gesetzes zurückführt. Für $\nu = 1$ ist es aber wiederum nur ein Grenzfall, nämlich $\mu = 5$, für welchen

$$\lim_{T=\infty} E = \text{endlich}$$

wird. Dieser aber ist im Widerspruch mit den Lummer-Pringsheim'schen Versuchen. Abgesehen von diesen beiden Grenzfällen führen also alle übrigen Fälle zu:

$$\lim_{T=\infty} E = \infty .$$

Nach alledem dürfte die Formel (I) mit $\mu < 5$ als die auf der Maxwell'schen Grundlage wahrscheinlichste anzusehen sein, welche notwendig zur Thiesen'schen mit $\mu = 4{,}5$ führt, falls die Lummer-Pringsheim'schen Versuche die schwarze Strahlung thatsächlich darstellen.[1])

Andererseits ist durch unsere Ausführungen die grundlegende Bedeutung des Maxwell'schen Gesetzes für die besprochenen Theorien in Frage gestellt worden. Um zu der Spectralgleichung des schwarzen Körpers zu gelangen, würde es genügen, eine Exponentialfunction von der Form $e^{-\frac{\varphi(\lambda, T)}{T}}$ zu Grunde zu legen. Dabei würde die durch Hypothese (16) auferlegte Beschränkung wegfallen; es könnte ν auch Werte > 1 annehmen. Das angegebene Verfahren führt z. B. auf

1) Die neueren, in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Februar 1900 vorgetragenen, aber noch nicht ausführlich publicirten Versuche von Lummer-Pringsheim für die Wellen von $12\,\mu$ bis $18\,\mu$ machen es wahrscheinlich, dass die allgemeine Formel (15) für alle in (17) enthaltenen Wertepaare μ, ν die schwarze Strahlung angenähert wiedergiebt. Welches der Wertepaare den Vorzug verdient, muss weiterer Untersuchung vorbehalten bleiben.

Grund der Tab. I für den schwarzen Körper zu den Wertepaaren

$$\nu = 2, \qquad \mu = 2{,}7,$$
$$\nu = 1{,}5, \qquad \mu = 3{,}2,$$
$$\nu = 1{,}2, \qquad \mu = 4.$$ [1])

Uebrigens scheint es nicht möglich, die Beobachtungen über die schwarze Strahlung durch einen algebraischen Ausdruck wiederzugeben. Es genüge hier die Andeutung, dass der dahin zielende Versuch Kövesligethy's[2]) als missglückt anzusehen ist, und dass überhaupt jeder algebraische Ausdruck der Form

$$C\,T^5 \frac{(\lambda\,T)^\varrho}{[(\lambda\,T)^\sigma + a]^\tau},$$

wo a und C Constanten sind, zwar den bekannten Strahlungsgesetzen genügt, nicht aber die beobachtete Energieverteilung wiedergiebt.

Zum Schluss ist noch kurz die Frage erörtert, durch welche Spectralgleichung sich die Platinbeobachtungen von Lummer-Pringsheim einheitlich darstellen lassen.

Charlottenburg, den 17. Juli 1900.

---

1) Auch mit diesem Wertepaare haben wir die Rechnungen durchgeführt, da es mit der Rayleigh'schen Spectralgleichung dasselbe μ gemein hat. Die Energieverteilung ist für 1650° abs. noch bis 10 μ, für 700° abs. und darunter sogar bis 18 μ dieselbe wie die der Thiesen'schen Formel ($\mu = 4{,}5$ und $\nu = 1$).

2) R. v. Kövesligethy, Versuche einer theoretischen Spectralanalyse. Halle a. S. 1900.

(Eingegangen 30. Juli 1900.)