4. *Ueber irreversible Strahlungsvorgänge;* *von Max Planck.*

(Nach den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin vom 4. Februar 1897, 8. Juli 1897, 16. December 1897, 7. Juli 1898, 18. Mai 1899 und nach einem auf der 71. Naturf.-Vers. in München gehaltenen Vortrage für die Annalen bearbeitet vom Verfasser.)

Die nachfolgende Arbeit enthält eine Darlegung der Hauptergebnisse meiner unter dem obigen Titel veröffentlichten Untersuchungen über die Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik für die Erscheinungen der Wärmestrahlung, vom Standpunkt der elektromagnetischen Lichttheorie betrachtet.

Dass auch die strahlende Wärme den Forderungen des zweiten Hauptsatzes Genüge leistet, dass z. B. die gegenseitige Zustrahlung verschieden temperirter Körper immer im Sinne einer Ausgleichung ihrer Temperaturen erfolgt, ist wohl allgemein unbestritten, und schon G. Kirchhoff hat hierauf seine Theorie des Emissions- und Absorptionsvermögens der Körper gegründet. Daher macht es die fortschreitende Erkenntnis der elektromagnetischen Natur der Wärmestrahlung zur dringenden Aufgabe, den zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie in seiner Anwendung auf die strahlende Wärme rein elektromagnetisch zu begreifen und womöglich auch zu beweisen. Erste Voraussetzung hierbei ist natürlich, dass man die Erscheinungen der Emission und Absorption strahlender Wärme als elektromagnetische Vorgänge auffasst, dass man also die Emission von Wärmestrahlen als bedingt ansieht durch die Aussendung elektromagnetischer Wellen von Seiten gewisser elementarer Oscillatoren, die man sich in irgend einem Zusammenhang mit den ponderablen Atomen der strahlenden Körper denken mag, und ferner, dass man die Absorption strahlender Wärme nicht etwa als Folge eines galvanischen Leitungswiderstandes oder irgend einer Art Reibung, sondern lediglich als Resonanzphänomen auffasst, indem die genannten Oscillatoren nicht nur Wellen aussenden, sondern auch durch auffallende Wellen zu Schwingungen angeregt werden. Hierin liegt zugleich in-

begriffen, dass die Dämpfung der elektrischen Schwingungen, die ein Oscillator ausführt, lediglich durch die Ausstrahlung elektromagnetischer Energie verursacht wird. Jede andere Art von Dämpfung würde nämlich locale (Joule'sche oder Reibungs-) Wärme erzeugen müssen, und durch die Annahme einer „Erwärmung der Atome" würde keine Lösung der Aufgabe, sondern im Gegenteil eine ins Ungemessene gehende Vermehrung ihrer Schwierigkeit geschaffen.

Denken wir uns also in einem homogenen Isolator, etwa in einem Vacuum, das rings von festen spiegelnden Wänden umschlossen ist, eine Anzahl solcher schwingender elementarer Oscillatoren von bestimmten Eigenperioden befindlich, so werden dieselben durch ihre Schwingungen Wellen emittiren und dadurch Energie verausgaben, gleichzeitig aber auch wieder die auf sie fallenden Wellen durch Resonanz selectiv absorbiren und dadurch ihre Schwingungsenergie verstärken. Vom thermischen Standpunkt aus betrachtet muss für diesen, allen äusseren Einflüssen entzogenen Vorgang der zweite Hauptsatz gelten, d. h. die Veränderungen gehen in einem bestimmten Sinne vor sich, indem die Entropie des ganzen Systemes fortwährend wächst, und endigen schliesslich in einen stationären Zustand, den des Wärmegleichgewichtes, der durch das Maximum der Entropie bestimmt ist.

Gilt nun das nämliche auch dann, wenn man den Vorgang rein vom elektromagnetischen Standpunkt betrachtet? Existirt auch dann eine durch den augenblicklichen Zustand des Systemes bestimmte, etwa als elektromagnetische Entropie zu bezeichnende Grösse, welche im Laufe des Processes fortwährend wächst? Auf den ersten Blick muss diese Frage principiell verneint werden, und zwar aus folgendem Grunde. Die Veränderungen des betrachteten Systemes werden geregelt durch die elektromagnetischen (Maxwell'schen) Grundgleichungen und durch die Grenzbedingungen an den spiegelnden Wänden und an den oscillirenden Resonatoren, wobei jeglicher Reibungsvorgang oder galvanischer Leitungswiderstand ausgeschlossen ist. Daher lassen sowohl die Grundgleichungen als auch die Grenzbedingungen für jeden möglichen Vorgang auch den gerade umgekehrten zu; denn zu jeder Lösung des Gleichungssystemes kann man eine entsprechende entgegen-

gesetzte finden, indem man das Vorzeichen der Zeit und zugleich das der magnetischen Kraft umkehrt. Damit ist aber offenbar die vom Entropieprincip geforderte Einseitigkeit der Veränderungen keineswegs gewährleistet. Ja, es scheint auch gar keine Aussicht vorhanden, durch Einführung einer neuen, ausserhalb der Maxwell'schen Gleichungen stehenden Hypothese diejenige Beschränkung der zulässigen Lösungen einzuführen, welche zum zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie hinleitet. Denn die Maxwell'schen Gleichungen bestimmen bekanntlich bei gegebenem Anfangszustand und gegebenen Grenzbedingungen den Vorgang eindeutig und für alle Zeiten. Was also ausserdem noch hinzugefügt wird, wäre entweder falsch — dann nämlich, wenn es einen Widerspruch gegen die Maxwell'schen Gleichungen enthält —, oder es wäre überflüssig —, wenn es keinen derartigen Widerspruch enthält.

So einfach und bündig diese Ueberlegung erscheint, so hat sie dennoch eine Lücke. Es ist in der That nicht nur möglich, sondern sogar unumgänglich notwendig, neben den Maxwell'schen Gleichungen noch eine besondere Hypothese einzuführen, wenn man in dem vorliegenden Falle auf rein elektromagnetischem Wege überhaupt zu bestimmten Resultaten kommen will.

Zur besseren Anschaulichkeit exemplificire ich auf einen einfachen concreten Fall. Denken wir uns einen aus einem continuirlichen Spectrum herausgeschnittenen monochromatischen Licht- oder Wärmestrahl, etwa von der Farbe einer der *D*-Linien, von constanter Intensität, und durch ein Nicol'sches Prisma polarisirt, so wird, vom thermischen Standpunkt betrachtet, der Strahl vollständig definirt sein, wenn ausser seinen rein geometrischen Bestimmungsstücken die Polarisationsebene, die Farbe und die Intensität gegeben ist. Nun weiss man, dass es absolut scharfe Linien im Spectrum nicht giebt, d. h. dass auch der homogenste Strahl einen gewissen endlichen, wenn auch noch so geringen Bezirk im Spectrum einnimmt. Dieser Unbestimmtheit könnte etwa dadurch abgeholfen werden, dass man zu der Schwingungszahl, welche die Farbe charakterisirt, noch die Angabe der Breite des von dem Strahl eingenommenen Spectralbezirkes hinzufügt. Mit diesen Daten wird der Thermodynamiker zufrieden sein; er

wird, und zwar, wie die Erfahrung lehrt, mit Recht, erwarten, dass alle Wirkungen, die dieser Strahl unter gewissen gegebenen Umständen ausübt, vollkommen bestimmte sind.

Ganz anders wird man vom elektrodynamischen Standpunkt aus die Sache ansehen. Will man nämlich den Strahl als elektromagnetische Welle darstellen, indem man etwa die auf der Polarisationsebene des Strahles senkrecht stehende elektrische Kraft an einem bestimmten Ort als Function der Zeit bestimmt, so ergiebt sich für den monochromatischen Strahl, mag er auch noch so homogen sein, eine vielfach unendliche Zahl von Möglichkeiten. Denn nehmen wir an, der Spectralbezirk des Strahles umfasse auch nur den millionsten Teil des sichtbaren Spectrums, also ein Schwingungsintervall, das etwa durch das Verhältnis 1:1,000 001 dargestellt wird, so bleibt für die Periode der betrachteten Welle noch die Auswahl unter allen zwischen 510 Billionen und 510000510000000 gelegenen Schwingungszahlen, d. h. unter 510 Millionen verschiedenen Schwingungszahlen übrig. Entwickelt man, was immer möglich ist, die elektrische Kraft als Function der Zeit für die Dauer einer Secunde in eine Fourier'sche Reihe, so wird im allgemeinen jede dieser 510 Millionen Schwingungszahlen in der betrachteten Welle vertreten sein, und da jeder einfach periodischen Partialschwingung eine andere Amplitude und eine andere Phase entsprechen kann, so haben wir im Ganzen noch zweimal 510 Millionen unbekannte Grössen, zu deren Bestimmung nur die beiden Grössen zur Verfügung sind, welche die Intensität und die Spectralbreite des Strahles angeben. Diese Grössen sind als gewisse Mittelwerte aufzufassen, aus denen man natürlich keine bestimmten Schlüsse auf die einzelnen Partialschwingungen der Fourier'schen Reihe ziehen kann. Eine Messung derselben ist schon aus dem Grunde undenkbar, weil die Partialschwingungen einzeln überhaupt gar keine unmittelbare physikalische Bedeutung haben; denn die Glieder der Reihe hängen von der Wahl der Grundperiode ab.

Andererseits darf man aber auch nicht glauben, dass die Werte der Amplituden und Phasen der einzelnen Partialschwingungen, wenn ihre Perioden so nahe beieinander liegen, überhaupt ohne merklichen Einfluss seien auf die vom ganzen

Strahl ausgehenden messbaren Wirkungen. Allerdings: wenn es sich nur um die Messung der Gesamtintensität des Strahles handelt, kommt nur die Summe der Einzelstrahlungen in Betracht. Aber gerade in dem vorliegenden Falle haben wir es mit der selectiven Absorption der Strahlung durch Resonatoren mit bestimmten Eigenperioden zu thun, und man weiss, dass, je kleiner das logarithmische Dämpfungsdecrement eines Resonators ist, um so kleinere Veränderungen der Schwingungsperiode der erregenden Welle dazu gehören, um recht beträchtliche Aenderungen der Resonanzwirkung nach sich zu ziehen. In der That würde es leicht sein, bei Festhaltung der Farbe, Spectralbreite und Intensität des Strahles die Verteilung der Amplituden und Phasen auf die einzelnen Partialschwingungen so vorzunehmen, dass die Resonanzwirkungen auf einen und denselben Resonator die allerverschiedensten und sonderbarsten Eigenschaften aufweisen würden.

Die angestellte Ueberlegung führt also zu dem unausweichlichen Schluss, dass bei gegebener Farbe, Spectralbreite und Intensität eines Strahles die Maxwell'schen Gleichungen keineswegs ausreichen, um alle messbaren Wirkungen des Strahles vorauszusagen, dass im Gegenteil die elektromagnetische Theorie in demselben Falle, wo die Thermodynamik ein ganz bestimmtes Resultat fordert, geradezu unendlich viele Möglichkeiten offen lässt, und dass man folglich vom Standpunkt der Elektrodynamik zunächst genötigt ist, die gestellte Aufgabe für unzureichend formulirt und daher für unlösbar zu erklären.

Will man sich also mit der Thermodynamik, und auch mit der Erfahrung, in Uebereinstimmung setzen, so ist das nur möglich auf Grund einer neuen, von den Maxwell'schen Gleichungen unabhängigen Hypothese. Eine derartige Hypothese ist enthalten in dem unten (§ 9) eingeführten Begriff der „natürlichen Strahlung". Wenn gesagt wird, ein elektromagnetischer Strahl besitze die Eigenschaften der natürlichen Strahlung, so soll dies kurz gesagt heissen: Die Energie der Strahlung vertheilt sich vollkommen *unregelmässig* auf die einzelnen Partialschwingungen, aus denen der Strahl zusammengesetzt gedacht werden kann.

Diese durch ihre Einfachheit fast selbstverständlich scheinende Voraussetzung erweist sich dennoch bei weiterer Durch-

führung als sehr weittragend. Zunächst führt sie auf rein elektromagnetischem Wege mit Notwendigkeit zur Gültigkeit eines dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik analogen Satzes. Wenn man, um wieder zu dem am Anfang betrachteten System von Resonatoren zurückzukehren, die Annahme macht, dass sämtliche im System vorkommende Strahlen zu allen Zeiten die Eigenschaften der natürlichen Strahlung besitzen, so lässt sich eine elektromagnetische Function des Zustandes angeben, welche fortwährend wächst, und deren Maximum mithin einen stationären Zustand angiebt. Man kann daher auch sagen: Die Hypothese der natürlichen Strahlung, für alle Orte und Zeiten als gültig vorausgesetzt, enthält in nuce den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik in seiner Anwendung auf Strahlungsvorgänge, sie ist nur ein anderer Ausdruck für denselben. Ihr Vorteil besteht aber darin, dass man die Grösse der Strahlungsentropie in allen Einzelheiten, und damit auch den Betrag ihrer Aenderung in einer bestimmten Zeit angeben kann, während der zweite Hauptsatz in seiner gewöhnlichen Fassung den Begriff der Zeit überhaupt nicht enthält. Durch Identificirung der elektromagnetischen Entropie mit der thermodynamischen Entropie ergiebt sich ohne weiteres die elektromagnetische Definition der Temperatur eines Wärmestrahles, und das Maximum der Entropie ergiebt das Wärmegleichgewicht, d. h. den Zustand der stationären Wärmestrahlung. Das Gesetz der spectralen Energieverteilung in diesem Zustande erweist sich als identisch mit dem von W. Wien auf anderem Wege abgeleiteten Gesetz, das bekanntlich in neuerer Zeit durch die Untersuchungen von F. Paschen, sowie von O. Lummer und E. Pringsheim experimentell in gewisser Annäherung bestätigt worden ist. —

Die hier unternommene elektrodynamische Deutung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik legt es nahe, einen kurzen vergleichenden Blick auch auf dessen *mechanische* Deutung, namentlich auf die entsprechenden Fragen in der kinetischen Gastheorie, zu werfen. Auch hier finden wir bekanntlich denselben, oft besprochenen Gegensatz zwischen den Grundgleichungen der Mechanik, welche einen vollkommen reversibeln Charakter haben, und dem Inhalt des zweiten Hauptsatzes, welcher für alle wirklichen Vorgänge Irrever-

sibilität fordert. Aber auch hier lässt sich der Gegensatz in ganz ähnlicher Weise lösen durch die Einführung einer besonderen Hypothese, welche, solange sie in Gültigkeit bleibt, alle Consequenzen des zweiten Hauptsatzes in sich birgt. Es ist dies in der Ausdrucksweise von L. Boltzmann[1]) die Hypothese der „molecularen Unordnung". Sie ist notwendig und hinreichend für die Existenz einer durch den augenblicklichen Zustand bestimmten Function, welche sich fortwährend in dem nämlichen Sinne ändert und daher die wesentlichen Eigenschaften der Entropie besitzt. Allerdings erweist sich die Hypothese der molecularen Unordnung, falls man sie nicht nur für den Anfangszustand, sondern für alle Zeiten gültig annimmt, als unvereinbar mit der Voraussetzung einer endlichen Anzahl von einfachen, innerhalb starrer Wände eingeschlossenen Atomen, und dieser Umstand bereitet der Einführung des zweiten Hauptsatzes als eines allgemeinen Principes in die Gastheorie eine gewisse Schwierigkeit, welche auf der einen Seite zu Einwänden gegen die Berechtigung der Gastheorie überhaupt, auf der anderen dagegen zu Zweifeln an der Allgemeingültigkeit des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie geführt hat. Indessen handelt es sich hier in Wirklichkeit gar nicht um eine derartige Alternative. Wenn man von den eben genannten Voraussetzungen nur eine, etwa die Annahme starrer Wände, deren Existenz im strengen Sinne ohnehin von vornherein höchst unwahrscheinlich ist, fallen lässt, so scheint einer allgemeinen Durchführung der Hypothese der molecularen Unordnung nichts im Wege zu stehen, und damit bleibt auch vom Standpunkt der kinetischen Gastheorie aus die Möglichkeit gesichert, den zweiten Hauptsatz auf alle Zeiten auszudehnen.

Für die Hypothese der natürlichen Strahlung, angewendet auf den Fall eines zwischen spiegelnden Wänden befindlichen strahlenden Systemes, und die Frage ihrer unbeschränkten Gültigkeit würde sich übrigens wahrscheinlich eine ganz ähnliche Schwierigkeit wie die soeben geschilderte ergeben, falls man auf die Natur der als Strahlungscentren fungirenden elementaren Oscillatoren näher eingehen wollte. Das ist aber

---

1) L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie 1. p. 21. 1895.

bei der hier entwickelten Theorie gar nicht nötig, weil hier von vornherein die Voraussetzung eingeführt wird, dass die Wellenlänge der Eigenschwingung eines Oscillators gross ist gegen seine linearen Dimensionen; und unter dieser Voraussetzung lassen sich die Gesetze der Emission und Absorption ganz ohne Rücksicht auf die specielle Beschaffenheit des Resonators entwickeln. Es kann auch z. B. ganz dahingestellt bleiben, ob die Schwingungen der elementaren Resonatoren auf Leitungsströmen (selbstverständlich ohne galvanischen Widerstand) oder auf Convectionsströmen (Bewegungen elektrisch geladener Teilchen) beruhen. Sobald man aber diese Frage offen lässt, ist auch kein Anhaltspunkt vorhanden, um den Gültigkeitsbereich der Hypothese der natürlichen Strahlung zeitlich irgendwie einzuschränken, und damit verlieren auch die Bedenken gegen eine beständige Zunahme der Entropie ihre Stütze. [1])

Erster Abschnitt.

Emission und Absorption elektromagnetischer Strahlung durch einen Resonator.

§ 1. Schwingungen eines geradlinigen Resonators.

In einem von beliebigen elektromagnetischen Wellen durchzogenen Vacuum befinde sich ein geradliniger elektrischer Resonator, dessen Eigenperiode einer im Verhältnis zu seinen Lineardimensionen grossen Wellenlänge entspricht und dessen Schwingungen nur durch Ausstrahlung von Energie in den umgebenden Raum, nicht durch galvanischen Leitungswiderstand oder andere in seinem Innern wirksame, Energie consumirende Vorgänge gedämpft werden. Bezeichnet dann $f(t)$ das Moment des vom Resonator zur Zeit t dargestellten elektrischen Dipols, $Z(t)$ die in die Richtung des Resonators fallende Componente der Intensität des elektrischen Feldes, welches von den im Vacuum sich fortpflanzenden Wellen am Orte des Resonators

1) Die folgende Darstellung bildet, mit einigen Abänderungen und Zusätzen, eine Wiedergabe meiner letzten, das Wesentliche der Theorie zusammenfassenden Mittheilung an die Berliner Akademie der Wissenschaften (vom 18. Mai 1899).

gebildet wird, beides gemessen im absoluten elektrostatischen Maass, so ist die Schwingung des Resonators bestimmt durch seinen Anfangszustand (für $t = 0$) und durch die folgende Differentialgleichung[1]):

$$(1) \qquad \frac{d^2 f}{d t^2} + 2 \sigma \nu_0 \frac{d f}{d t} + 4 \pi^2 \nu_0^2 f = \frac{3 c^3 \sigma}{4 \pi^2 \nu_0} Z.$$

c bedeutet hierbei die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum, σ das logarithmische Decrement der Schwingungsamplituden, das nach den gemachten Voraussetzungen notwendig klein ist, ν_0 die Schwingungszahl des Resonators (Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit).

Die Energie U_0 des Resonators ist bestimmt durch die Gleichung:

$$(2) \qquad U_0 = \tfrac{1}{2} K f^2 + \tfrac{1}{2} L \left(\frac{d f}{d t}\right)^2,$$

wobei die Constanten[2]):

$$(3) \qquad K = \frac{16 \pi^4 \nu_0^3}{3 c^3 \sigma}, \qquad L = \frac{4 \pi^2 \nu_0}{3 c^3 \sigma}.$$

Mit der Einführung von U_0 lässt sich die Schwingungsgleichung (1) in folgender Form schreiben:

$$(4) \qquad d U_0 = Z \cdot \frac{d f}{d t} d t - \frac{8 \pi^2 \nu_0^2}{3 c^3} \left(\frac{d f}{d t}\right)^2 d t.$$

Das erste Glied rechts bezeichnet die in der Zeit $d t$ vom Resonator aus der Umgebung absorbirte Energie, das zweite Glied die in derselben Zeit vom Resonator nach aussen emittirte Energie. Während diese letztere ein constantes Vorzeichen hat, wird, wie man sieht, die absorbirte Energie unter Umständen negativ, nämlich immer dann, wenn die „erregende Schwingung", als welche wir Z kurz bezeichnen wollen, entgegengesetzt gerichtet ist dem im Resonator fliessenden elektrischen Strome, dessen Intensität das Vorzeichen von $d f / d t$ besitzt. In diesem Falle wird also durch die „erregende Schwingung" dem Resonator Energie entzogen.

---

1) M. Planck, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 165. 1896; Wied. Ann. **60**. p. 593. 1897.

2) l. c.

§ 2. Darstellung der erregenden Schwingung durch ein Fourier'sches Integral.

In jedem Falle lässt sich Z für ein beliebig grosses endliches Zeitintervall, etwa von $t = 0$ bis $t = T$, folgendermaassen schreiben:

$$Z = \int_0^\infty d\nu \cdot C_\nu \cos(2\pi\nu t - \vartheta_\nu), \tag{5}$$

wobei C_ν (positiv) und ϑ_ν gewisse Functionen der positiven Integrationsvariabeln ν bedeuten[1]), deren Werte übrigens durch das Verhalten der Grösse Z in dem genannten Zeitintervall bekanntlich noch nicht bestimmt sind, sondern ausserdem noch von der Art abhängen, wie die Zeitfunction Z über jenes Intervall hinaus nach beiden Seiten fortgesetzt wird. Es wäre daher auch ganz unrichtig, wenn man die Schwingung Z sich etwa als ein continuirliches „Spectrum" von periodischen Schwingungen mit den constanten Amplituden C_ν vorstellen würde.

Wir wollen T so gross wählen, dass nicht nur $\nu_0 T$, sondern auch $\sigma\nu_0 T$ durch eine grosse Zahl ausgedrückt wird, und wollen im Folgenden immer nur solche zwischen 0 und T gelegene Zeiten t betrachten, für welche $\sigma\nu_0 t$, und um so mehr $\nu_0 t$, grosse Werte hat. Diese Festsetzung gewährt nämlich den Vorteil, dass wir dann von dem Anfangszustand des Resonators (für $t = 0$) ganz absehen können, weil derselbe sich zur Zeit t nur mit einem Gliede von der Grössenordnung $e^{-\sigma\nu_0 t}$ geltend macht und daher dann keinen merklichen Einfluss auf den Zustand mehr ausübt.

§ 3. Berechnung der Resonatorschwingung.

Unter den gemachten Voraussetzungen ergiebt sich für irgend eine erregende Schwingung (5) als allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung (1), wie leicht zu verificiren:

---

1) Die Einführung der „Frequenz" $n = 2\pi\nu$ statt der Schwingungszahl ν würde in diesem Abschnitt zu einer Vereinfachung, in den folgenden dagegen zu einer Complicirung der Ausdrücke führen. Statt der Darstellung durch ein Integral könnte man übrigens ebenso gut Z in eine Fourier'sche Reihe, etwa mit der Grundperiode T, entwickeln; der Unterschied ist, soweit ich sehe, nur ein formeller. Auf die Vorzüge des Integrals hat mich mein Freund Carl Runge hingewiesen.

$$f(t) = \frac{3\,c^3}{16\,\pi^3\,\nu_0^2} \int d\nu \cdot \frac{C_\nu}{\nu} \cdot \sin\gamma_\nu \cdot \cos(2\,\pi\,\nu\,t - \vartheta_\nu - \gamma_\nu),$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\operatorname{ctg}\gamma_\nu = \frac{\nu_0^2 - \nu^2}{\sigma\,\nu_0\,\nu} \cdot \pi.$$

Um γ_ν eindeutig zu machen, wollen wir noch festsetzen, dass γ_ν von 0 bis π wächst, wenn ν/ν_0 von kleinen zu grossen Werten übergeht.

Da σ klein ist, so weicht $\sin\gamma_\nu$ nur dann merklich von Null ab, wenn ν/ν_0 nahezu $= 1$, d. h. es tragen nur diejenigen Glieder des Fourier'schen Integrals (5) merklich zur Resonanzerregung bei, deren Index ν der Eigenschwingung ν_0 des Resonators nahe liegt. Man kann daher für gewöhnlich einfacher schreiben:

$$(6)\quad \begin{cases} f(t) = \dfrac{3\,c^3}{16\,\pi^3\,\nu_0^3} \displaystyle\int d\nu\, C_\nu \sin\gamma_\nu \cos(2\pi\,\nu\,t - \vartheta_\nu - \gamma_\nu) \\ \text{und:} \\ \operatorname{ctg}\gamma_\nu = 2\,\pi \cdot \dfrac{\nu_0 - \nu}{\sigma\,\nu_0}. \end{cases}$$

§ 4. Intensität der erregenden Schwingung.

Die „Intensität der erregenden Schwingung" J als Function der Zeit t definiren wir als den Mittelwert von Z^2 in dem Zeitintervall von t bis $t + \tau$, wobei τ möglichst klein genommen ist gegen die Zeit T, aber immer noch gross gegen die Zeit $1/\nu_0$, d. h. gegen die Zeitdauer einer Schwingung des Resonators. In dieser Festsetzung liegt eine gewisse Unbestimmtheit, welche bewirkt, dass im allgemeinen J nicht nur von t, sondern auch von τ abhängig bleiben wird. Wenn dies der Fall ist, kann man von einer Intensität der erregenden Schwingung überhaupt nicht reden; denn es gehört mit zum Begriff der Schwingungsintensität, dass ihr Betrag sich innerhalb der Zeitdauer einer einzelnen Schwingung nur unmerklich ändert. Daher wollen wir künftig nur solche Vorgänge in Betracht ziehen, bei denen unter den angegebenen Bedingungen ein nur von t abhängiger Mittelwert von Z^2 existirt. Die später (§ 9) vorzunehmende weitere Beschränkung auf den Fall der „natürlichen Strahlung" wird zugleich auch die Erfüllung

der hier als nothwendig erkannten Bedingung enthalten. Um ihr in mathematischer Hinsicht zu genügen, wollen wir zunächst annehmen, dass die Grössen C_ν in (5) für alle diejenigen Werte von ν unmerklich klein sind, welche gegen ν_0 verschwinden, oder, anders ausgedrückt, dass in der erregenden Schwingung Z keine ganz langsamen Perioden von merklicher Amplitude enthalten sind.

Zur Berechnung von J bilden wir nun aus (5) den Wert von Z^2 und bestimmen den Mittelwert $\overline{Z^2}$ dieser Grösse durch Integration nach t von t bis $t+\tau$, Division durch τ und Uebergang zur Grenze durch gehörige Verkleinerung von τ. Es ergiebt sich so zunächst:

$$Z^2 = \int_0^\infty\int_0^\infty d\nu'\, d\nu\, C_{\nu'}\, C_\nu \cos(2\pi\nu' t - \vartheta_{\nu'}) \cos(2\pi\nu t - \vartheta_\nu).$$

Vertauscht man die Werte von ν und ν', so ändert sich die Function unter dem Integralzeichen nicht; daher setzen wir fest:

$$\nu' > \nu$$

und schreiben:

$$Z^2 = 2\int\int d\nu'\, d\nu\, C_{\nu'}\, C_\nu \cos(2\pi\nu' t - \vartheta_{\nu'}) \cos(2\pi\nu t - \vartheta_\nu)$$

oder:

$$Z^2 = \int\int d\nu'\, d\nu\, C_{\nu'}\, C_\nu \{\cos[2\pi(\nu'-\nu)t - \vartheta_{\nu'} + \vartheta_\nu] + \cos[2\pi(\nu'+\nu)t - \vartheta_{\nu'} - \vartheta_\nu]\}.$$

Folglich:

$$J = \overline{Z^2} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} Z^2\, dt$$

$$= \int\int d\nu'\, d\nu\, C_{\nu'}\, C_\nu \left\{\frac{\sin\pi(\nu'-\nu)\tau \,.\, \cos[\pi(\nu'-\nu)(2t+\tau) - \vartheta_{\nu'} + \vartheta_\nu]}{\pi(\nu'-\nu)\tau} + \frac{\sin\pi(\nu'+\nu)\tau \,.\, \cos[\pi(\nu'+\nu)(2t+\tau) - \vartheta_{\nu'} - \vartheta_\nu]}{\pi(\nu'+\nu)\tau}\right\}.$$

Da nach der oben gemachten Voraussetzung alle diejenigen C_ν unmerklich klein sind, für welche ν gegen ν_0 verschwindet, so kann man in dem vorstehenden Ausdruck ν, und umsomehr ν', als von gleicher oder höherer Grössenordnung wie ν_0 annehmen. Lassen wir nun τ immer kleiner werden, so ist vermöge der Bedingung, dass $\nu_0\tau$ gross bleibt,

der Nenner $(\nu' + \nu)\tau$ des zweiten Bruches jedenfalls gross, während der des ersten Bruches, $(\nu' - \nu)\tau$, mit abnehmendem τ unter jeden endlichen Betrag herabsinken kann. Daher reducirt sich das Integral für genügend kleine Werte von $\nu' - \nu$ auf:

$$\iint d\nu' \, d\nu \, C_{\nu'} \, C_\nu \cos[2\pi(\nu' - \nu)t - \vartheta_{\nu'} + \vartheta_\nu],$$

also unabhängig von τ. Die übrigen Glieder des Doppelintegrals, welche grösseren Werten von $\nu' - \nu$, d. h. schnelleren Aenderungen mit der Zeit entsprechen, hängen im allgemeinen von τ ab und müssen daher verschwinden, wenn die Intensität J nicht von τ abhängen soll. Daher ist in unserem Falle, wenn man noch

$$\mu = \nu' - \nu \, (> 0)$$

als zweite Integrationsvariable statt ν' einführt:

$$J = \iint d\mu \, d\nu \, C_{\nu+\mu} C_\nu \cos(2\pi\mu t - \vartheta_{\nu+\mu} + \vartheta_\nu) \tag{7}$$

oder:

$$\left\{\begin{aligned} & J = \int d\mu \, (A_\mu \sin 2\pi\mu t + B_\mu \cos 2\pi\mu t), \\ & \text{wobei:} \\ & A_\mu = \int d\nu \, C_{\nu+\mu} C_\nu \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu) \\ & B_\mu = \int d\nu \, C_{\nu+\mu} C_\nu \cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu). \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Hierdurch ist die Intensität J der erregenden Schwingung, falls sie überhaupt existirt, in der Form eines Fourier'schen Integrals dargestellt.

§ 5. Schnell veränderliche und langsam veränderliche Grössen.

Schon in dem Begriff der Schwingungsintensität J liegt die Voraussetzung enthalten, dass diese Grösse mit der Zeit t viel langsamer variirt als die Schwingungsamplitude Z selber. Dasselbe folgt aus der Berechnung von J im vorigen Paragraphen. Denn dort ist für alle in Betracht kommenden Wertenpaare von C_ν und $C_{\nu'}$ $\nu\tau$ und $\nu'\tau$ gross, dagegen $(\nu' - \nu)\tau$ klein; folglich a fortiori

$$\frac{\nu' - \nu}{\nu} = \frac{\mu}{\nu} \textit{ klein}, \tag{9}$$

und demgemäss sind die Fourier'schen Integrale (5) und (8) in ganz verschiedener Weise mit der Zeit veränderlich. Wir werden daher im Folgenden in Bezug auf die Abhängigkeit von der Zeit zwei verschiedenartig veränderliche Arten von Grössen zu unterscheiden haben: schnell veränderliche Grössen, wie Z und das mit Z durch die Differentialgleichung (1) verbundene f, und langsam veränderliche Grössen, wie J und ebenso auch U_0, die Energie des Resonators, welche sich wegen der geringen Dämpfung ebenfalls nur langsam im Verhältnis gegen f ändert.[1]) Doch ist dieser Unterschied in der zeitlichen Veränderlichkeit der genannten Grössen nur ein relativer, da der absolute Wert des Differentialquotienten von J nach der Zeit von der Grösse der Zeiteinheit abhängt und durch geeignete Wahl derselben beliebig gross gemacht werden kann. Man ist daher nicht berechtigt, $J(t)$ oder $U_0(t)$ schlechthin als langsam veränderliche Functionen von t zu bezeichnen. Wenn wir diese Ausdrucksweise der Kürze halber in der Folge dennoch anwenden, so geschieht das stets im relativen Sinne, nämlich mit Bezug auf das abweichende Verhalten der Functionen $Z(t)$ oder $f(t)$.

Was nun aber die Abhängigkeit der Phasenconstante ϑ_ν von ihrem Index ν anbetrifft, so besitzt diese notwendig die Eigenschaft der schnellen Veränderlichkeit im *absoluten* Sinne. Denn obwohl μ klein ist gegen ν, ist doch die Differenz $\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu$ im allgemeinen nicht klein, weil sonst die Grössen A_μ und B_μ in (8) zu specielle Werte erhalten würden, und daraus folgt, dass $(\partial \vartheta_\nu / \partial \nu) \,.\, \nu$ durch eine grosse Zahl dargestellt wird. Hieran ändert auch ein Wechsel der Zeiteinheit oder eine Verlegung des Anfangspunktes der Zeit nichts wesentliches.

Die schnelle Veränderlichkeit der Grössen ϑ_ν mit ν ist also eine im absoluten Sinne notwendige Bedingung für die Existenz einer bestimmten Schwingungsintensität J, oder mit anderen Worten: für die Möglichkeit der Einteilung der von der Zeit abhängigen Grössen in schnell veränderliche und in langsam veränderliche — einer Einteilung, die auch in anderen physikalischen Theorien häufig gemacht wird und auf welche sich alle folgenden Untersuchungen gründen.

---

1) In der Akustik und Optik pflegt man bekanntlich diesen Unterschied durch die Worte „Schwingung" und „Schwebung" anzudeuten.

§ 6. Berechnung der Energie des Resonators.

Die im vorstehenden eingeführte Unterscheidung zwischen schnell veränderlichen und langsam veränderlichen Grössen ist in physikalischer Beziehung hier deshalb wichtig, weil wir im Folgenden nur die langsame Abhängigkeit von der Zeit als direct messbar annehmen wollen. Damit nähern wir uns eben den in der Optik und in der Wärmestrahlung thatsächlich stattfindenden Verhältnissen. Unsere Aufgabe wird dann darin bestehen, Beziehungen ausschliesslich zwischen langsam veränderlichen Grössen aufzustellen; denn diese allein sind es, welche mit den Ergebnissen der Erfahrung verglichen werden können. Wir bestimmen daher nun zunächst die Werte der wichtigsten hier in Betracht kommenden langsam veränderlichen Grössen, nämlich die Energie des Resonators und den Betrag der vom Resonator emittirten und absorbirten Energie.

Die Energie des Resonators, die in (2) gegeben ist, besteht aus zwei Teilen: der elektrischen Energie und der magnetischen Energie. Da wegen der kleinen Dämpfung der Mittelwert dieser beiden Energiearten jedenfalls der nämliche ist, d. h.

$$K\overline{f^2} = L\overline{\left(\frac{df}{dt}\right)^2}, \tag{10}$$

so können wir auch schreiben:

$$U_0 = K\overline{f^2}, \tag{11}$$

indem wir mit $\overline{f^2}$ den Mittelwert von f^2 in dem Zeitintervall von t bis $t + \tau$ (§ 4) bezeichnen. Dieser Mittelwert berechnet sich nach (6) genau in der nämlichen Weise wie der von Z^2 in § 4, nur dass hier $(3\,c^3/16\,\pi^3\nu_0^3)\,C_\nu \sin\gamma_\nu$ statt C_ν, und $\vartheta_\nu + \gamma_\nu$ statt ϑ_ν zu setzen ist. Wir erhalten daher analog (7), mit Rücksicht auf den Wert von K in (3):

$$\left\{\begin{aligned} U_0 = \frac{3\,c^3}{16\,\pi^2\sigma\nu_0^3}\iint d\mu\, d\nu\, C_{\nu+\mu}\, C_\nu \sin\gamma_{\nu+\mu}\sin\gamma_\nu \times \\ \cos(2\,\pi\,\mu\,t - \vartheta_{\nu+\mu} + \vartheta_\nu - \gamma_{\nu+\mu} + \gamma_\nu). \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Oder

$$
(13)\quad \begin{cases}
U_0 = \int d\mu\,(a_\mu \sin 2\pi\mu t + b_\mu \cos 2\pi\mu t), \\
\text{wobei:} \\
a_\mu = \dfrac{3c^3}{16\pi^2\sigma\nu_0^3}\displaystyle\int d\nu\, C_{\nu+\mu}\, C_\nu \sin\gamma_{\nu+\mu}\sin\gamma_\nu \times \\
\quad \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu + \gamma_{\nu+\mu} - \gamma_\nu), \\
b_\mu = \dfrac{3c^3}{16\pi^2\sigma\nu_0^3}\displaystyle\int d\nu\, C_{\nu+\mu}\, C_\nu \sin\gamma_{\nu+\mu}\sin\gamma_\nu \times \\
\quad \cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu + \gamma_{\nu+\mu} - \gamma_\nu).
\end{cases}
$$

Ebenso wie ϑ_ν so ist auch γ_ν, wie man aus (6) erkennt, im absoluten Sinne schnell veränderlich mit ν. Man darf daher, obwohl für alle in Betracht kommenden Werte der $C\,\mu$ klein ist gegen ν, den Winkel $\gamma_{\nu+\mu}$ nicht etwa annähernd gleich γ_ν setzen, nämlich dann nicht, wenn μ von gleicher oder sogar höherer Grössenordnung ist wie $\sigma\nu_0$.

§ 7. Berechnung der vom Resonator emittirten und absorbirten Energie.

Der Betrag der vom Resonator in der Zeit dt emittirten Energie, als einer „langsam veränderlichen" Grösse, ergiebt sich direct aus der Gleichung (4) als:

$$\frac{8\pi^2\nu_0^2}{3c^3}\cdot\overline{\left(\frac{df}{dt}\right)^2}\,dt$$

oder nach (10), (11) und (3):

$$= \frac{8\pi^2\nu_0^2}{3c^3}\cdot\frac{K}{L}\cdot\overline{f^2}\,dt$$

$$= \frac{8\pi^2\nu_0^2}{3c^3}\cdot\frac{1}{L}\cdot U_0\cdot dt$$

$$(14)\qquad = 2\sigma\nu_0\, U_0\, dt.$$

Die in einem Zeitelement vom Resonator emittirte Energie ist proportional der Energie des Resonators, ferner seiner Schwingungszahl und seinem logarithmischen Decrement.

Der Betrag der vom Resonator absorbirten Energie, als einer „langsam veränderlichen" Grösse, lässt sich aus (4) entweder berechnen durch die Bildung des Mittelwertes von $Z.(df/dt)$ mit Hülfe der bekannten Ausdrücke für Z und f, oder kürzer direct aus der soeben gefundenen Form jener Gleichung:

$$(15)\qquad \overline{Z.\frac{df}{dt}}\,dt = dU_0 + 2\sigma\nu_0\, U_0\, dt.$$

Setzt man für U_0 den in (13) gegebenen Wert, so ergiebt sich für *die in der Zeit dt vom Resonator absorbirte Energie* der Wert:

$$(16)\quad \begin{cases} d\,t \cdot \int d\,\mu\,(a'_\mu \sin 2\,\pi\,\mu\,t + b'_\mu \cos 2\,\pi\,\mu\,t), \\ \text{wobei:} \quad a'_\mu = 2\,\sigma\,v_0\,a_\mu - 2\,\pi\,\mu\,b_\mu \\ \qquad\qquad\quad b'_\mu = 2\,\sigma\,v_0\,b_\mu + 2\,\pi\,\mu\,a_\mu. \end{cases}$$

Diese Grössen wollen wir nun mit der Intensität der erregenden Schwingung in eine allgemeine Beziehung bringen, wobei immer festzuhalten ist, dass das Verhältnis $\mu : \sigma\,v_0$ beliebig grosse und kleine Werte annehmen kann.

§ 8. Spectrale Zerlegung der Intensität der erregenden Schwingung.

Von den bisher in unseren Gleichungen auftretenden Energiegrössen dürfen wir als direct messbar ansehen nur die Intensität J der erregenden Schwingung und die Energie U_0 des Resonators. Dieselben stehen aber im allgemeinen in keinem einfachen Zusammenhang miteinander, da die Energie des Resonators nicht allein von der Gesamtintensität J der erregenden Schwingung Z, sondern noch von specielleren Eigentümlichkeiten dieser Schwingung abhängt. Man kann nun offenbar die Eigenschaften einer bestimmten erregenden Schwingung Z dadurch weiter verfolgen, dass man die zu untersuchende Schwingung Z auf verschiedene Resonatoren wirken lässt und die Energie misst, welche ein jeder Resonator einzeln unter dem Einfluss derselben erregenden Schwingung Z annimmt. Es ist dies ganz die nämliche Methode, welche in der Akustik zur Analyse eines Klanges angewendet wird.

Hierauf gründen wir unsere Definition der in der Gesamtintensität J enthaltenen *Intensität $\mathfrak{J}_\nu$ einer bestimmten Schwingungszahl ν.* Wir setzen nämlich:

$$(17)\qquad J = \int_0^\infty \mathfrak{J}_\nu\,d\,\nu$$

und definiren $\mathfrak{J}_\nu$, eine „langsam veränderliche" Function der beiden Variabeln ν und t, durch die Energie, welche ein Resonator mit der Schwingungszahl ν unter dem Einfluss der erregenden Schwingung Z annimmt.

Hier ist aber sogleich noch ein wichtiger Punkt zu erledigen. Da nämlich die Energie eines von der Schwingung Z erregten Resonators nicht allein von seiner Eigenschwingung, sondern ausserdem auch von seiner Dämpfung abhängt, so ist noch auf eine geeignete Wahl der Dämpfungsconstanten des zur Messung der Intensität $\mathfrak{J}_\nu$ benutzten Resonators Rücksicht zu nehmen. Damit der Resonator auf eine bestimmte Schwingungszahl und nicht etwa auf ein endliches Intervall von Schwingungszahlen merklich reagirt, muss sein Dämpfungsdecrement klein sein. Es darf aber auch andererseits nicht allzu klein genommen werden; denn ein Resonator mit sehr kleiner Dämpfung braucht sehr lange Zeit zum Abklingen, und ein solcher Resonator würde den Zweck, durch sein Mitschwingen jederzeit eine *gleichzeitige* Eigenschaft der ihn erregenden, im allgemeinen mit der Zeit veränderlichen Schwingung anzugeben, nicht erfüllen, da seine Energie nicht von der gleichzeitigen Beschaffenheit, sondern zugleich auch von der Vorgeschichte der erregenden Schwingung abhängen würde. Die Energie des Resonators würde also nicht die Intensität $\mathfrak{J}_\nu$ selber, sondern einen gewissen, über einen grösseren Zeitraum erstreckten Mittelwert dieser Grösse zum Ausdruck bringen.

Um diesen Umstand zu berücksichtigen, wählen wir das logarithmische Decrement ϱ aller zur Analyse der erregenden Schwingung Z benutzten Resonatoren zwar klein gegen 1, machen aber doch $\varrho\nu$ gross gegen alle μ, was stets möglich ist, da nach (9) u klein ist gegen ν. Dann ist der Zustand eines analysirenden Resonators, z. B. desjenigen mit der Schwingungszahl ν_0, vollständig bestimmt durch die gleichzeitige Beschaffenheit der erregenden Schwingung, und man kann sagen, dass der Resonator alle Intensitätsschwankungen der erregenden Schwingung momentan anzeigt. In der That ersieht man z. B. leicht aus (16), wenn man darin ϱ statt σ setzt, dass die Glieder mit dem Factor μ gegen die Glieder mit dem Factor $\varrho\nu_0$ verschwinden und dass dadurch die vom Resonator absorbirte Energie proportional wird seiner augenblicklichen Energie U_0, was nur dann möglich ist, wenn der Zustand des Resonators nur von der gleichzeitigen Beschaffenheit der erregenden Schwingung abhängt.

Unter den gemachten Voraussetzungen ist die in der Ge-

Nachdem Herr Professor Dr. Eilhard Wiedemann die seit dem Tode des Herrn Geheimrath Professor Dr. Gustav Wiedemann provisorisch geführte Redaction mit dem Schlussheft des vorigen Bandes niedergelegt hat, ist die Redactionsführung in die Hände des Herrn Professor Dr. Paul Drude in Leipzig gelegt worden. Die Mitwirkung des Herrn Professor Dr. Max Planck bleibt wie bisher bestehen.

Wie aus der nachstehenden Mittheilung hervorgeht, haben sich gleichzeitig die Herren F. Kohlrausch, M. Planck, G. Quincke, W. C. Röntgen und E. Warburg auf Vorschlag des wissenschaftlichen Ausschusses der Deutschen Physikalischen Gesellschaft zu einem Kuratorium vereinigt, um die gemeinsamen Interessen, die die deutsche physikalische Wissenschaft mit den Annalen verbinden, zum Ausdruck zu bringen und zu vertreten. Die Thätigkeit des Kuratoriums in besonderen Fällen ist aus der Mittheilung selbst zu ersehen.

Der Titel der Zeitschrift wurde dem jetzt rein physikalischen Inhalt entsprechend in „Annalen der Physik" geändert.

Der Abonnementspreis wird unter Beibehaltung des bisherigen Umfanges auf 38 Mark für den Jahrgang ermässigt.

***Leipzig,** Januar 1900.*

Die Verlagsbuchhandlung

Johann Ambrosius Barth.

Der Wissenschaftliche Ausschuss der Deutschen Physikalischen Gesellschaft hat auf Wunsch der Verlagsbuchhandlung über die Zukunft der Annalen beraten und ist dabei zu folgenden Vorschlägen gelangt:

1. Es wird ein Kuratorium, bestehend aus fünf Mitgliedern der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, eingesetzt. Dasselbe dient als begutachtende Instanz für alle die Leitung der Annalen betreffenden Angelegenheiten.

Insbesondere werden Meinungsverschiedenheiten zwischen Autor einerseits und Redacteur oder Verleger andererseits, über welche die Parteien unter sich nicht zur Einigung gelangen, vom Autor oder Redacteur, bezw. Verleger mit allen Acten vor das Kuratorium gebracht, welches ein Gutachten abgiebt, das seitens des Kuratoriums beiden Parteien mitgeteilt wird.

Hierzu gehören nicht Fragen über Aufnahme oder Kürzung von einzelnen Abhandlungen.

2. Dissertationen, welche noch nicht gedruckt waren, sollen überhaupt nicht, gedruckte im allgemeinen nur in gekürzter Bearbeitung in die Annalen aufgenommen werden.

Diese Vorschläge sind von der Verlagsbuchhandlung angenommen worden.

Weiter sehen wir uns zu der Erklärung veranlasst, dass der Redactionswechsel nicht von dem Wissenschaftlichen Ausschuss angeregt worden ist. Nachdem aber die Verlagsbuchhandlung den Redactionswechsel eingeleitet hat, erklären wir uns mit der Wahl des jetzigen Redacteurs vollkommen einverstanden.

Dem scheidenden Redacteur Herrn E. Wiedemann sprechen wir als Vertreter der Interessen, welche die Deutsche Physikalische Gesellschaft an der Redaction der Annalen nimmt, unsere Anerkennung und unseren Dank aus für dessen erfolgreiche Thätigkeit in der Redaction der Annalen und der Beiblätter.

Der Wissenschaftliche Ausschuss
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft.

Der Aufforderung, die Hauptredaction der Annalen zu übernehmen, habe ich Folge geleistet.

Ich will die Herausgabe in dem bisherigen Sinne fortzusetzen versuchen. Die Annalen waren bis jetzt das Centralorgan für die deutschen physikalischen Originalarbeiten, welches dabei durch möglichste Beschränkung des Umfangs die Gesamt-Uebersicht erleichterte. Die Vereinigung dieser beiden Seiten der Aufgabe wird immer schwieriger bei dem bedeutenden Anwachsen der wissenschaftlichen Production, sie war aber durch die umsichtige Leitung der beiden letzten Herausgeber, der Herren G. und E. Wiedemann, in der glücklichsten Weise gelöst. Ich bitte die Herren Mitarbeiter, auch mich in der Erfüllung dieser Aufgabe, die im Interesse der Gesamtheit der Physiker liegt, zu unterstützen und mir ihr volles Vertrauen entgegenzubringen. Auch ich will bestrebt sein, unparteiisch das Interesse jedes Einzelnen zu vertreten, soweit es vereinbar ist mit dem Zwecke der Zeitschrift und dem Interesse der Gesamtheit.

P. Drude.

samtintensität J der erregenden Schwingung enthaltene Intensität der Schwingungszahl ν_0, die wir kurz mit $\mathfrak{J}_0$ bezeichnen wollen, nach (12) als Function der Zeit gegeben durch:

$$\mathfrak{J}_0 = \varkappa_0 \cdot \frac{3\,c^3}{16\,\pi^2\,\varrho\,\nu_0^3} \iint d\,\mu\,d\,\nu\,C_{\nu+\mu}\,C_\nu \sin^2\delta_\nu \times$$
$$\cos(2\,\pi\,\mu\,t - \vartheta_{\nu+\mu} + \vartheta_\nu).$$

Hier ist $\varkappa_0$ ein von ν_0 abhängiger, sogleich zu bestimmender Proportionalitätsfactor; der Winkel δ_ν geht aus γ_ν in § 3 hervor, wenn man darin ϱ statt σ setzt, also:

$$\text{(18)} \qquad \operatorname{ctg}\delta_\nu = \pi \cdot \frac{\nu_0^2 - \nu^2}{\varrho\,\nu_0\,\nu},$$

und $\delta_{\nu+\mu}$ ist $= \delta_\nu$ gesetzt, da μ klein ist gegen $\varrho\,\nu_0$. Der Proportionalitätsfactor $\varkappa_0$ bestimmt sich aus der Bedingung (17). Schreibt man nämlich diese Bedingung nach (7) in der Form:

$$\iint d\,\mu\,d\,\nu\,C_{\nu+\mu}\,C_\nu \cos(2\,\pi\,\mu\,t - \vartheta_{\nu+\mu} + \vartheta_\nu) = \int_0^\infty \mathfrak{J}_0\,d\,\nu_0,$$

so folgt aus dem soeben für $\mathfrak{J}_0$ gefundenen Ausdruck, da μ und ν nicht von ν_0 abhängen:

$$1 = \int_0^\infty d\,\nu_0 \cdot \frac{3\,c^3\,\varkappa_0}{16\,\pi^2\,\varrho\,\nu_0^3} \cdot \sin^2\delta_\nu,$$

oder nach (18):

$$\frac{16\,\pi^2}{3c^3} = \int_0^\infty d\,\nu_0 \cdot \frac{\varkappa_0}{\varrho\,\nu_0^3} \cdot \frac{1}{1 + \pi^2 \cdot \frac{(\nu_0^2 - \nu^2)^2}{\varrho^2\,\nu_0^2\,\nu^2}}.$$

Da nun ϱ klein ist gegen 1, so braucht man nur diejenigen Werte der Function unter dem Integralzeichen zu berücksichtigen, für welche ν_0 nahe $= \nu$ ist, und erhält so:

$$\frac{16\,\pi^2}{3\,c^3} = \frac{\varkappa}{2\,\nu^2}$$

($\varkappa$ ist der Wert von $\varkappa_0$ für $\nu_0 = \nu$), oder:

$$\varkappa_0 = \frac{32\,\pi^2\,\nu_0^2}{3\,c^3},$$

welcher Wert thatsächlich den verlangten Wert des letzten Integrals ergiebt.[1])

Daher ist die Intensität $\mathfrak{J}_0$ der Schwingungszahl ν_0:

$$(19)\quad \begin{cases} \mathfrak{J}_0 = \int d\mu\,(\mathfrak{A}_\mu^0 \sin 2\pi\mu t + \mathfrak{B}_\mu^0 \cos 2\pi\mu t), \\ \text{wobei:} \\ \mathfrak{A}_\mu^0 = \frac{2}{\varrho\,\nu_0}\int d\nu\, C_{\nu+\mu}\, C_\nu \sin^2\delta_\nu \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu), \\ \mathfrak{B}_\mu^0 = \frac{2}{\varrho\,\nu_0}\int d\nu\, C_{\nu+\mu}\, C_\nu \sin^2\delta_\nu \cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu). \end{cases}$$

Im allgemeinen werden die Werte von $\mathfrak{A}_\mu^0$ und $\mathfrak{B}_\mu^0$ noch von ϱ abhängig sein. In diesem Falle kann man von einer Intensität der Schwingungszahl ν_0 in bestimmtem Sinne gar nicht reden. Wir wollen nun für das folgende die Voraussetzung machen, dass eine jede Schwingungszahl ν eine ganz bestimmte, mit der Zeit „langsam veränderliche" Schwingungsintensität $\mathfrak{J}_\nu$ besitzt, unabhängig von der zu ihrer Messung dienenden Grösse ϱ. Dann ist zugleich auch die schon in § 4 eingeführte Bedingung erfüllt, dass eine Gesamtintensität

$$J = \int_0^\infty \mathfrak{J}_\nu\, d\nu$$

der erregenden Schwingung Z existirt. Auf die Frage, weshalb und inwieweit diese Annahme, welche übrigens in der Wärme- und Lichtstrahlung bisher thatsächlich stets gemacht wurde, in der Natur gerechtfertigt ist, soll hier nicht näher eingegangen werden.

§ 9. Natürliche Strahlung.

Wir haben jetzt die erregende Schwingung Z, die zu den „schnell veränderlichen" und daher nicht direct messbaren Grössen gehört, so weit analysirt, dass wir ihre Gesamtintensität J zu jeder Zeit in eine Reihe von messbaren Grössen zerlegt haben: den Intensitäten $\mathfrak{J}_\nu$ der verschiedenen Schwin-

1) Diese Deduction ist gegen die frühere Darstellung (Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin vom 18. Mai 1899, p. 450), Dank einer mündlichen Bemerkung des Hrn. Boltzmann, etwas verändert worden.

gungszahlen ν. Weitere Mittel, um „langsam veränderliche" Eigenschaften von Z abzuleiten, besitzen wir nicht; die Methoden der Analyse sind also hiermit erschöpft. Was wir durch sie von der schnell veränderlichen Schwingung Z kennen gelernt haben, ist aber im Vergleich zu der in ihr noch enthaltenen Mannigfaltigkeit von Eigenschaften nur äusserst wenig. Die Functionen C_ν und ϑ_ν selber, in ihrer Abhängigkeit von ν, sind und bleiben uns innerhalb eines breiten Spielraumes gänzlich unbekannt.

Stellen wir nun zunächst dasjenige zusammen, was wir durch Messung der Intensität $\mathfrak{J}_0$ der Schwingungszahl ν_0, als einer langsam veränderlichen Function der Zeit t, über die schnell veränderlichen Grössen C_ν und ϑ_ν erfahren können. Als messbar haben wir in (19) die Grössen $\mathfrak{A}_\mu^0$ und $\mathfrak{B}_\mu^0$ zu betrachten, für alle Werte von μ. Setzen wir nun:

$$(20) \qquad \begin{cases} C_{\nu+\mu}\, C_\nu \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu) = \mathfrak{A}_\mu^0 + \xi, \\ C_{\nu+\mu}\, C_\nu \cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu) = \mathfrak{B}_\mu^0 + \eta, \end{cases}$$

wobei ξ und η schnell veränderliche Functionen von ν und μ sind, so folgt aus (19):

$$\mathfrak{A}_\mu^0 = \mathfrak{A}_\mu^0 \cdot \frac{2}{\varrho\,\nu_0} \cdot \int d\nu \sin^2 \delta_\nu + \frac{2}{\varrho\,\nu_0} \int \xi \sin^2 \delta_\nu\, d\nu.$$

Nun ist mit Rücksicht auf (18):

$$\frac{2}{\varrho\,\nu_0} \int \sin^2 \delta_\nu\, d\nu = 1.$$

Folglich:

$$\int \xi \sin^2 \delta_\nu\, d\nu = 0\,.$$

Ebenso:

$$\int \eta \sin^2 \delta_\nu\, d\nu = 0\,.$$

Da $\sin \delta_\nu$ für alle Werte von ν verschwindet, deren Verhältnis zu ν_0 nicht nahe gleich 1 ist, so stellt die Grösse $\mathfrak{A}_\mu^0$ in (20) den langsam veränderlichen *Mittelwert* der schnell veränderlichen Grösse $C_{\nu+\mu}\, C_\nu \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$ für ν nahe gleich ν_0 vor, und ebenso $\mathfrak{B}_\mu^0$ den entsprechenden Mittelwert der schnell veränderlichen Grösse $C_{\nu+\mu}\, C_\nu \cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$.[1])

1) Man könnte auch sehr viel einfacher die Intensität $\mathfrak{J}_\nu$ einer bestimmten Schwingungszahl ν durch die genannten Mittelwerte *definiren*,

Kehren wir nun zu der Untersuchung des Resonators mit der Schwingungszahl ν_0 und dem Dämpfungsdecrement σ zurück, so ist zunächst von vornherein einleuchtend, dass zur Berechnung des Einflusses, welchen die erregende Schwingung Z auf den Resonator ausübt, die Kenntnis der Mittelwerthe $\mathfrak{A}_\mu^0$ und $\mathfrak{B}_\mu^0$ im allgemeinen noch nicht genügt, sondern dass dazu die Grössen C_ν und ϑ_ν selber bekannt sein müssen. In der That ersieht man aus dem in (13) abgeleiteten Ausdruck der Energie U_0 des Resonators, dass diese erst dann genau berechnet werden kann, wenn man die Werte von $C_{\nu+\mu} C_\nu \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$ und von $C_{\nu+\mu} C_\nu \cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$ für jeden Wert von ν anzugeben vermag, für den $\nu : \nu_0$ nahe gleich 1 ist. Mit anderen Worten: die in der erregenden Schwingung enthaltene Intensität $\mathfrak{J}_0$ der Schwingungszahl ν_0, auch wenn sie für alle Zeiten bekannt ist, bestimmt im allgemeinen noch nicht die Energie U_0 des von der Schwingung getroffenen Resonators.

Somit bleibt nichts anderes übrig, als entweder auf die Constatirung eines allgemeinen Zusammenhangs der Grössen U_0 und $\mathfrak{J}_0$ überhaupt zu verzichten, was aber den Ergebnissen aller Erfahrung zuwiderlaufen würde, oder mittels einer neu einzuführenden Hypothese die vorhandene Kluft zu überbrücken. Die physikalischen Thatsachen entscheiden für die zweite Alternative.

Die Hypothese, welche wir jetzt als die nächstliegende und wohl einzig mögliche einführen und für alles folgende beibehalten wollen, besteht in der Annahme, dass bei der Berechnung von U_0 aus der Gleichung (13) in den Integralen, welche die Werte der Coefficienten a_μ und b_μ angeben, für die schnell veränderlichen Grössen $C_{\nu+\mu} C_\nu \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$ und $C_{\nu+\mu} C_\nu \cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$ — die einzigen von C_ν und ϑ_ν abhängigen Grössen, die in diesen Integralen vorkommen — ohne merklichen Fehler ihre langsam veränderlichen Mittelwerte $\mathfrak{A}_\mu^0$ und $\mathfrak{B}_\mu^0$ gesetzt werden können. Damit erhält dann die Aufgabe, U_0 aus $\mathfrak{J}_0$ zu berechnen, eine ganz bestimmte,

---

indem man das für die Gesamtintensität J aufgestellte Integral (7) einfach in der Form von (17) schreibt und daraus die Werte der $\mathfrak{A}_\mu$ und $\mathfrak{B}_\mu$ ableitet. Dann geht aber die hier benutzte physikalische Bedeutung der Definition verloren.

durch Messungen zu verificirende Lösung. Um aber auszudrücken, dass die hier abzuleitenden Gesetze nicht für jede Art Schwingungen, sondern nur mit Ausschliessung gewisser besonderer Einzelfälle gelten, wollen wir jede Art Strahlung, auf welche die hier eingeführte Hypothese passt, als „natürliche" Strahlung bezeichnen. Dieser Name empfiehlt sich deshalb, weil, wie sich im dritten Abschnitt zeigen wird, der Licht- und Wärmestrahlung thatsächlich die Eigenschaften der „natürlichen" Strahlung zukommen.

Man kann den Begriff der natürlichen Strahlung noch anschaulicher, aber weniger direct, als oben geschehen, auch dahin fassen, dass bei ihr die Abweichungen der unmessbaren schnell veränderlichen Grössen $C_{\nu+\mu} C_\nu \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$ etc. von ihren messbaren langsam veränderlichen Mittelwerten $\mathfrak{A}^0_\mu$ etc. gänzlich unregelmässig sind.

§ 10. Fundamentalgleichung der entwickelten Theorie.

Gemäss der im vorigen Paragraphen eingeführten Hypothese ergiebt sich aus der Gleichung (13):

$$a_\mu = \frac{3\,c^3}{16\,\pi^2\,\sigma\,\nu_0^3} \int d\nu \sin\gamma_{\nu+\mu} \times$$
$$\sin\gamma_\nu \left(\mathfrak{A}^0_\mu \cos(\gamma_{\nu+\mu} - \gamma_\nu) + \mathfrak{B}^0_\mu \sin(\gamma_{\nu+\mu} - \gamma_\nu)\right),$$
$$b_\mu = \frac{3\,c^3}{16\,\pi^2\,\sigma\,\nu_0^3} \int d\nu \sin\gamma_{\nu+\mu} \times$$
$$\sin\gamma_\nu \left(\mathfrak{B}^0_\mu \cos(\gamma_{\nu+\mu} - \gamma_\nu) - \mathfrak{A}^0_\mu \sin(\gamma_{\nu+\mu} - \gamma_\nu)\right),$$

oder:

$$a_\mu = \frac{3\,c^3}{16\,\pi^2\,\sigma\,\nu_0^3} (\mathfrak{A}^0_\mu\,\alpha + \mathfrak{B}^0_\mu\,\beta),$$
$$b_\mu = \frac{3\,c^3}{16\,\pi^2\,\sigma\,\nu_0^3} (\mathfrak{B}^0_\mu\,\alpha - \mathfrak{A}^0_\mu\,\beta),$$

wobei:

$$\alpha = \int_0^\infty d\nu \sin\gamma_{\nu+\mu} \sin\gamma_\nu \cos(\gamma_{\nu+\mu} - \gamma_\nu),$$
$$\beta = \int_0^\infty d\nu \sin\gamma_{\nu+\mu} \sin\gamma_\nu \sin(\gamma_{\nu+\mu} - \gamma_\nu).$$

Nun ergiebt sich mit Berücksichtigung der in (6) gegebenen Werte von $\operatorname{ctg}\gamma_\nu$ und $\operatorname{ctg}\gamma_{\nu+\mu}$ durch elementare Rechnungen:

$$\alpha = \frac{\sigma \nu_0}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 \mu^2}{\sigma^2 \nu_0^2}},$$

$$\beta = \frac{\pi \mu}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 \mu^2}{\sigma^2 \nu_0^2}}.$$

Folglich, wenn man daraus a_μ und b_μ berechnet und die so erhaltenen Werte in (16) einsetzt:

$$a_\mu' = \frac{3 c^3 \sigma}{16 \pi^2 \nu_0} \mathfrak{A}_\mu^0;$$

$$b_\mu' = \frac{3 c^3 \sigma}{16 \pi^2 \nu_0} \mathfrak{B}_\mu^0.$$

Die in der Zeit $d t$ vom Resonator absorbirte Energie ist also nach (16):

$$d t \cdot \frac{3 c^3 \sigma}{16 \pi^2 \nu_0} \cdot \int d \mu (\mathfrak{A}_\mu^0 \sin 2 \pi \mu t + \mathfrak{B}_\mu^0 \cos 2 \pi \mu t),$$

oder nach (19):

$$= d t \cdot \frac{3 c^3 \sigma}{16 \pi^2 \nu_0} \cdot \mathfrak{J}_0. \tag{21}$$

Die in einem Zeitelement vom Resonator absorbirte Energie ist proportional der in der erregenden Schwingung enthaltenen Intensität seiner Eigenperiode, ferner seinem logarithmischen Decrement und dem Cubus der Lichtgeschwindigkeit, und umgekehrt proportional der Schwingungszahl.

Bei der natürlichen Strahlung wird also stets positive Energie absorbirt, was gewöhnlich als selbstverständlich vorausgesetzt wird, aber doch im allgemeinen, wie schon in der zu (4) gemachten Bemerkung betont wurde, nicht der Fall zu sein braucht.

Durch Substitution des Wertes der absorbirten Energie in (15) erhält man schliesslich die Fundamentalgleichung der entwickelten Theorie:

$$d t \cdot \frac{3 c^3 \sigma}{16 \pi^2 \nu_0} \cdot \mathfrak{J}_0 = d U_0 + 2 \sigma \nu_0 U_0 d t$$

oder:

$$\frac{d U_0}{d t} + 2 \sigma \nu_0 U_0 = \frac{3 c^3 \sigma}{16 \pi^2 \nu_0} \mathfrak{J}_0. \tag{22}$$

Diese Differentialgleichung kann zur Berechnung der Energie U_0 des Resonators benutzt werden, wenn die seiner Schwingungs-

zahl entsprechende Intensität $\mathfrak{J}_0$ der erregenden Schwingung als Function der Zeit gegeben ist. Da die Functionen $U_0(t)$ und $\mathfrak{J}_0(t)$ hier nicht mehr durch Fourier'sche Integrale dargestellt zu werden brauchen, so können wir von jetzt ab auch die früher in § 2 eingeführte Beschränkung in Bezug auf das betrachtete Zeitintervall wieder aufheben, und diese und die folgenden Gleichungen als für alle positiven und negativen Zeiten gültig ansehen.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist:

$$U_0 = \frac{3\,c^3\,\sigma}{16\,\pi^2\,\nu_0} \int_{-\infty} \mathfrak{J}_0(x)\, e^{2\,\sigma\,\nu_0\,(x-t)}\, d\,x\,.$$

Für constantes $\mathfrak{J}_0$ hat man:

$$U_0 = \frac{3\,c^3}{32\,\pi^2\,\nu_0^2}\,\mathfrak{J}_0\,.$$

Bei constanter Bestrahlung ist die Energie des Resonators proportional der in der erregenden Schwingung enthaltenen Intensität seiner Schwingungszahl, ferner dem Cubus der Lichtgeschwindigkeit, und umgekehrt proportional dem Quadrat der Schwingungszahl, aber unabhängig von der Dämpfung.

Nachdem wir so die Abhängigkeit der Energie des Resonators von der Intensität der erregenden Schwingung festgestellt haben, wird es unsere nächste Aufgabe sein, die letztere Grösse in Zusammenhang zu bringen mit der im umgebenden Felde stattfindenden Energiestrahlung. Dies geschieht nach bekannten Methoden im nächsten Abschnitt und führt zur Formulirung der Gesetze der Energie und der Entropie.

Zweiter Abschnitt.

Erhaltung der Energie und Vermehrung der Entropie.

Indem wir jetzt zur Untersuchung der Vorgänge in dem den Resonator umgebenden elektromagnetischen Felde übergehen, wollen wir überall im Folgenden von den im vorigen Abschnitt abgeleiteten Resultaten Gebrauch machen, selbstverständlich unter der Voraussetzung, dass dabei überall und zu allen Zeiten die Bedingungen der natürlichen Strahlung erfüllt sind. Dementsprechend brauchen wir künftig nie mehr

mit Amplituden und Phasen zu rechnen, sondern stets nur mit Intensitäten und Energien, d. h. mit „langsam veränderlichen“ (im Sinne des § 5) Grössen. In diesem Sinne ist auch die Bedeutung der unten benutzten Raumelemente und Zeitelemente zu verstehen, nämlich als Grössen, welche unendlich klein sind gegen die Dimensionen der betrachteten Räume und Zeiten, aber immer noch gross gegen die betrachteten Wellenlängen und Schwingungsdauern. Die Wände des durchstrahlten Raumes denken wir uns als ruhende, absolut spiegelnde Flächen, deren Krümmungsradien gross sind gegen alle in Betracht kommenden Wellenlängen. Dann können wir auch von allen Beugungsphänomenen absehen und immer nur von geradliniger Fortpflanzung der Strahlung sprechen.

§ 11. Intensität der Energiestrahlung von bestimmter Richtung, Schwingungszahl und Polarisation.

In einem von irgend welchen elektromagnetischen Strahlen durchsetzten Vacuum ist die Intensität der Strahlung an irgend einem Orte $\mathfrak{O}$ zu einer bestimmten Zeit nach Richtung, Schwingungszahl (Farbe) und Polarisation zu unterscheiden. Um zunächst die Richtung ins Auge zu fassen, denken wir uns von dem Punkte $\mathfrak{O}$ eine kleine geradlinige Strecke von der Länge r gezogen in derjenigen Richtung, welche durch die Polarcoordinatenwinkel ϑ (zwischen 0 und π) und φ (zwischen 0 und 2π) bestimmt ist. Denken wir uns nun sowohl im Anfangspunkt $\mathfrak{O}$ als auch im Endpunkt der Strecke je ein Flächenelement, $d\sigma$ und $d\sigma'$, senkrecht zu r gelegt, so wird die gesamte Energiemenge, welche in der Zeit dt durch die bei $\mathfrak{O}$ liegende Fläche $d\sigma$ der Fläche $d\sigma'$ zugestrahlt wird, gleich sein dem Ausdruck:

$$dt \cdot \frac{d\sigma \cdot d\sigma'}{r^2} \cdot K, \tag{23}$$

wobei K, die Intensität der Energiestrahlung in der Richtung (ϑ, φ), eine endliche positive Function des Ortes, der Zeit und der beiden Winkel ϑ und φ bedeutet. Setzt man darin z. B. für ϑ den Wert $\pi - \vartheta$ und für φ den Wert $\varphi + \pi$, so erhält man für K die Intensität der Energiestrahlung in der entgegengesetzten Richtung, eine von der vorigen im allgemeinen gänzlich verschiedene Grösse.

Weiter lässt sich die Strahlung K zerlegen in eine Reihe von monochromatischen, in derselben Richtung fortschreitenden Strahlen, bei deren jedem ausser der Intensität noch die Polarisation zu unterscheiden ist. Zerlegt man einen in bestimmter Richtung fortschreitenden monochromatischen Strahl von beliebigem Polarisationszustande in zwei geradlinig polarisirte Componenten, deren Polarisationsebenen aufeinander senkrecht stehen, im übrigen aber beliebig sind, so ist bekanntlich die Summe der Intensitäten der beiden Componenten gleich der Intensität des ganzen Strahles, unabhängig von der Orientirung des Ebenenpaares. Die Grösse der beiden Componenten kann stets dargestellt werden durch zwei Ausdrücke von der Form:

$$\mathfrak{K} \cos^2 \omega + \mathfrak{K}' \sin^2 \omega$$

und

$$\mathfrak{K} \sin^2 \omega + \mathfrak{K}' \cos^2 \omega ,$$

wobei ω das Azimut der Polarisationsebene einer Componente bedeutet. Die Summe dieser beiden Ausdrücke ergiebt in der That die Intensität des ganzen Strahles: $\mathfrak{K} + \mathfrak{K}'$, unabhängig von ω. $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ repräsentiren zugleich den grössten und den kleinsten Wert der Intensität, den eine Componente überhaupt annehmen kann (für $\omega = 0$ und $\omega = \pi/2$). Daher wollen wir diese Werte die „Hauptwerte der Intensität" und die entsprechenden Polarisationsebenen die „Hauptpolarisationsebenen" des Strahles nennen. Beide sind natürlich im allgemeinen mit der Zeit veränderlich. Somit können wir allgemein setzen:

$$K = \int_0^\infty d\nu (\mathfrak{K}_\nu + \mathfrak{K}'_\nu) , \tag{24}$$

wobei die positiven Grössen $\mathfrak{K}_\nu$ und $\mathfrak{K}'_\nu$, die beiden Hauptwerte der Strahlungsintensität von der Schwingungszahl ν, ausser von ν noch vom Orte, von der Zeit und von den Winkeln ϑ und φ abhängen. Für unpolarisirte Strahlen ist $\mathfrak{K}_\nu = \mathfrak{K}'_\nu$ und

$$K = 2 \int_0^\infty \mathfrak{K}_\nu \, d\nu \, . \tag{25}$$

§ 12. Energie und Energiedichte.

Die totale Energie U_t eines durchstrahlten Vacuums und einer darin befindlichen Anzahl von Resonatoren der betrachteten Art ist von der Form:

$$U_t = \Sigma U + \int u \, d\tau, \tag{26}$$

wobei U die Energie eines einzelnen Resonators (der im vorigen Abschnitt hinzugefügte Index 0 kann von jetzt an überall weggelassen werden), Σ die Summation über alle Resonatoren, und u die Dichte der strahlenden Energie im Raumelement $d\tau$ des Vacuums bezeichnet. Da die Resonatoren verschwindend kleine Räume einnehmen, so ist es gleichgültig, ob in dem Integral die Integration auch über die von den Resonatoren erfüllten Räume erstreckt wird oder nicht.

Berechnen wir nun die Energiedichte u, eine Function des Ortes und der Zeit, für irgend einen Punkt $\mathfrak{O}$ des Vacuums, aus der Strahlungsintensität K. Zu diesem Zwecke legen wir um den Punkt $\mathfrak{O}$ als Centrum eine Kugelfläche vom kleinen Radius r. Alle Strahlen, die durch das Kugelcentrum hindurchgehen, kommen von Elementen der Kugelfläche her. Betrachten wir z. B. denjenigen Strahl, welcher in der Richtung (ϑ, φ) durch das Centrum geht; derselbe kommt von einem Flächenelement ds her, dessen Lage durch die Polarcoordinaten r, $\pi - \vartheta$, $\varphi + \pi$ bestimmt ist.

Die Energiemenge, welche dieser Strahl in der Zeit dt durch ein beim Kugelcentrum befindliches, senkrecht zu seiner Fortpflanzungsrichtung orientirtes Flächenelement $d\sigma$ hindurchsendet, beträgt nach (23):

$$dt \cdot \frac{d\sigma \cdot ds}{r^2} \cdot K.$$

Folglich die Energiedichte, die dieser Strahl im Kugelcentrum besitzt, durch Division mit $d\sigma$ und mit der in der Zeit dt zurückgelegten Strecke $c \cdot dt$:

$$\frac{ds}{c\,r^2} \cdot K.$$

Durch Integration über alle Elemente ds der Kugelfläche erhält man also die gesamte elektromagnetische Energiedichte im Kugelcentrum $\mathfrak{O}$:

$$u = \int \frac{d s}{c r^2} \cdot K$$

oder, da

$$d s = r^2 \sin \vartheta \, d \vartheta \, d \varphi = r^2 . d \Omega ,$$

wenn man mit $d\Omega$ den Oeffnungswinkel des dem Element $d s$ entsprechenden Kegels bezeichnet:

$$u = \int \frac{1}{c} K . d \Omega , \tag{27}$$

eine Grösse, die nur mehr von Ort und Zeit abhängt.

Ist speciell die Strahlungsintensität K nach allen Richtungen constant, so ergiebt sich hieraus die oft benutzte Beziehung:

$$u = \frac{K}{c} \int d \Omega = \frac{4 \pi K}{c} . \tag{28}$$

Durch Substitution des Wertes von K aus (24) findet man auch leicht die Energiedichte, die jeder einzelne monochromatische Strahl in irgend einem Punkt des Raumes zu irgend einer Zeit besitzt.

Andererseits ist die räumliche Dichte der elektromagnetischen Energie in einem Punkte des Vacuums:

$$u = \frac{1}{8 \pi} (\overline{X^2} + \overline{Y^2} + \overline{Z^2} + \overline{L^2} + \overline{M^2} + \overline{N^2}),$$

wo X^2, Y^2, Z^2, L^2, M^2, N^2 die Quadrate der Componenten des elektromagnetischen Feldes bedeuten, als „langsam veränderliche" Grössen (§ 5) betrachtet, und daher mit dem auf den Mittelwert deutenden Querstrich versehen. Da für jeden einzelnen Strahl die mittlere elektrische und magnetische Energie gleich sind, so kann man immer schreiben:

$$u = \frac{1}{4 \pi} (\overline{X^2} + \overline{Y^2} + \overline{Z^2}) . \tag{29}$$

§ 13. Intensität der einen Resonator erregenden Schwingung.

Nun nehmen wir in dem Centrum $\mathfrak{O}$ der vorhin betrachteten Kugel einen Resonator der im ersten Abschnitt untersuchten Art befindlich an, dessen Axe wir zur Z-Axe machen. Dann ist die Intensität der den Resonator erregenden Schwingung nach § 4:

$$J = \overline{Z^2} .$$

Wir wollen daher nun den Wert von $\overline{Z^2}$ berechnen. Zu diesem Zweck müssen wir auch auf die Polarisation der den Punkt $\mathfrak{O}$ treffenden monochromatischen Strahlen Rücksicht nehmen. Fassen wir also wieder denjenigen Strahl ins Auge, der, vom Flächenelemente ds am Orte $(r, \pi - \vartheta, \varphi + \pi)$ kommend, in der Richtung (ϑ, φ) den Punkt $\mathfrak{O}$ trifft, so zerfällt derselbe in eine Reihe monochromatischer Strahlen, von denen einer die Hauptwerte der Intensität $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ besitzen möge. Bezeichnen wir nun den Winkel, welchen die zur Hauptintensität $\mathfrak{K}$ gehörige Polarisationsebene mit der durch die Richtung des Strahles und die Z-Axe (die Resonatoraxe) gelegten Ebene bildet, mit ω, einerlei in welchem Quadranten, so lässt sich der ganze monochromatische Strahl zerlegen in die beiden geradlinig und senkrecht aufeinander polarisirten Componenten:

$$(30) \qquad \begin{cases} \mathfrak{K} \cos^2 \omega + \mathfrak{K}' \sin^2 \omega, \\ \mathfrak{K} \sin^2 \omega + \mathfrak{K}' \cos^2 \omega, \end{cases}$$

von denen die erste in der durch die Z-Axe gehenden Ebene polarisirt ist, da sie für $\omega = 0$ gleich $\mathfrak{K}$ wird. Diese Componente liefert *keinen* Beitrag zu dem Werthe von $\overline{Z^2}$ im Punkte $\mathfrak{O}$, weil die elektrische Kraft eines geradlinig polarisirten Strahles senkrecht steht auf der Polarisationsebene. Es bleibt also nur übrig die zweite Componente, deren elektrische Kraft den Winkel $\pi/2 - \vartheta$ mit der Z-Axe bildet. Nun ist nach dem Poynting'schen Satze die Intensität eines geradlinig polarisirten Strahles im Vacuum gleich $c/4\pi$ mal dem mittleren Quadrat der elektrischen Kraft. Folglich ist das mittlere Quadrat der elektrischen Kraft des hier betrachteten Strahles:

$$\frac{4\pi}{c}(\mathfrak{K} \sin^2 \omega + \mathfrak{K}' \cos^2 \omega)$$

und das mittlere Quadrat der Componente davon in der Richtung der Z-Axe:

$$(31) \qquad \frac{4\pi}{c}(\mathfrak{K} \sin^2 \omega + \mathfrak{K}' \cos^2 \omega) \sin^2 \vartheta .$$

Durch Integration über alle Schwingungszahlen und alle Oeffnungswinkel erhalten wir mithin den gesuchten Wert:

$$(32) \qquad \overline{Z^2} = \frac{4\pi}{c} \int \sin^2 \vartheta \, d\Omega \int d\nu (\mathfrak{K}_\nu \sin^2 \omega_\nu + \mathfrak{K}'_\nu \cos^2 \omega_\nu) = J.$$

Sind speciell alle Strahlen unpolarisirt und die Strahlungsintensität nach allen Richtungen constant, so ist $\mathfrak{K}_\nu = \mathfrak{K}'_\nu$ und, da:

$$\int \sin^2 \vartheta \, d\Omega = \iint \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{8\pi}{3},$$

$$\overline{Z^2} = \frac{32\pi^2}{3c} \int \mathfrak{K}_\nu \, d\nu = \overline{X^2} = \overline{Y^2}$$

und durch Substitution in (29) und in (25):

$$u = \frac{8\pi}{c} \int \mathfrak{K}_\nu \, d\nu = \frac{4\pi K}{c},$$

übereinstimmend mit (28).

Nehmen wir nun nach § 8 die spectrale Zerlegung der Intensität J vor:

$$J = \int \mathfrak{J}_\nu \, d\nu,$$

so ergiebt sich durch Vergleichung mit (32) für die in der erregenden Schwingung enthaltene Intensität einer bestimmten Schwingungszahl ν der Wert:

$$\mathfrak{J}_\nu = \frac{4\pi}{c} \int \sin^2 \vartheta \, d\Omega \, (\mathfrak{K}_\nu \sin^2 \omega_\nu + \mathfrak{K}'_\nu \cos^2 \omega_\nu). \tag{33}$$

Da nun $\mathfrak{J}$ mit der Energie U des Resonators durch die Gleichung (22) zusammenhängt, so ist hiermit die Möglichkeit gegeben, die Schwingung des Resonators zu berechnen, wenn die Intensitäten und Polarisationen aller den Resonator treffenden Strahlen für alle Zeiten bekannt sind. Insbesondere ergiebt sich für unpolarisirte und nach allen Richtungen gleichmässige Strahlung:

$$\mathfrak{J} = \frac{32\pi^2}{3c} \mathfrak{K}$$

und nach (22):

$$\frac{dU}{dt} + 2\sigma\nu U = \frac{2c^2\sigma}{\nu} \mathfrak{K}.$$

Ist die Strahlung auch noch unabhängig von der Zeit, oder der Strahlungszustand „stationär", so ist auch U von der Zeit unabhängig und:

$$U = \frac{c^2}{\nu^2} \mathfrak{K}. \tag{34}$$

§ 14. Absorbirte und emittirte Energie.

Die ganze in der Zeit dt von dem Resonator absorbirte Energie beträgt nach (21):

$$dt \cdot \frac{3\,c^3\,\sigma}{16\,\pi^2\,\nu} \cdot \mathfrak{J}$$

oder nach (33):

$$dt \cdot \frac{3\,c^2\,\sigma}{4\,\pi\,\nu} \int \sin^2\vartheta\, d\,\Omega\,(\mathfrak{K}\sin^2\omega + \mathfrak{K}'\cos^2\omega).$$

Daher wird von der in der Richtung (ϑ, φ) auf den Resonator fallenden Strahlung in der Zeit dt der Energiebetrag:

$$dt \cdot \frac{3\,c^2\,\sigma}{4\,\pi\,\nu}\,(\mathfrak{K}\sin^2\omega + \mathfrak{K}'\cos^2\omega)\sin^2\vartheta\, d\,\Omega$$

absorbirt.

Nun beträgt die Intensität der in der Richtung (ϑ, φ) auf den Resonator fallenden Strahlung, soweit sie „absorbirbar" ist, d. h. die dem Resonator entsprechende Schwingungszahl und Polarisation besitzt, nach (31), da der Factor $4\,\pi/c$ hier wegzulassen ist:

$$(\mathfrak{K}\sin^2\omega + \mathfrak{K}'\cos^2\omega)\sin^2\vartheta\,. \tag{35}$$

Daraus ergiebt sich der Satz: Der absolute Betrag der vom Resonator in der Zeit dt absorbirten Energie wird erhalten, wenn man die Intensität der in irgend einer Richtung (ϑ, φ) auf ihn fallenden absorbirbaren Strahlung mit

$$dt \cdot \frac{3\,c^2\,\sigma}{4\,\pi\,\nu} \cdot d\,\Omega \tag{36}$$

multiplicirt und diesen Ausdruck über alle Richtungen (ϑ, φ) integrirt. Der Factor $3\,c^2\,\sigma/4\,\pi\,\nu$ bestimmt also die Breite des vom Resonator aufgefangenen Strahlenbündels, indem er ein Maass liefert für das Product aus dem Querschnitt des Resonators und der Breite des von ihm beeinflussten Spectralbezirkes.

Auf der anderen Seite beträgt die vom Resonator in der Zeit dt nach allen Richtungen emittirte Energie nach (14):

$$dt\,.\,2\,\sigma\,\nu\,U$$

oder, was dasselbe ist:

$$dt \cdot \frac{3\,\sigma\,\nu}{4\,\pi}\,U \cdot \int \sin^2\vartheta\, d\,\Omega.$$

Da nun die Intensität der vom Resonator in der Richtung (ϑ, φ) emittirten Strahlung bekanntlich unabhängig ist von φ und proportional $\sin^2\vartheta$, so beträgt die in der Zeit dt in dieser Richtung emittirte Energie:

$$dt \cdot \frac{3\sigma\nu}{4\pi} U \sin^2\vartheta \, d\Omega$$

und die *Intensität* der vom Resonator in derselben Richtung emittirten Strahlung, durch Division mit (36):

$$\frac{\nu^2 U \sin^2\vartheta}{c^2}. \tag{37}$$

Für den am Schluss des vorigen Paragraphen betrachteten „stationären" Strahlungszustand ist

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}' \quad \text{und} \quad U = \frac{c^2}{\nu^2}\mathfrak{K}.$$

Man sieht also, dass im stationären Strahlungszustand die Intensität (35) der in irgend einer Richtung auf den Resonator fallenden absorbirbaren Strahlung gleich ist der Intensität (37) der in derselben Richtung vom Resonator emittirten Strahlung, wie es sein muss.

§ 15. Intensität und Polarisation der den Resonator passirenden Strahlenbündel.

Wir wollen nun, als Vorbereitung für die folgenden Deductionen, die Eigenschaften der verschiedenen den Resonator passirenden Strahlenbündel noch näher ins Auge fassen. Von allen Seiten treffen Strahlen auf den im Anfangspunkt $\mathfrak{O}$ der Coordinaten liegend gedachten Resonator; betrachten wir denjenigen Strahl, welcher in der Richtung (ϑ, φ), also von einem Punkte mit den Polarcoordinaten $\pi - \vartheta$, $\varphi + \pi$ kommend, auf den Resonator fällt, so können wir ihn uns zunächst zerlegt denken in seine monochromatischen Bestandteile, und brauchen uns nur mit demjenigen dieser Bestandteile weiter zu beschäftigen, welcher der Schwingungszahl ν des Resonators entspricht; denn alle übrigen Strahlen streichen über den Resonator einfach hinweg, ohne ihn zu beeinflussen oder von ihm beeinflusst zu werden. Die Intensität des monochromatischen Strahles von der Schwingungszahl ν ist:

$$\mathfrak{K} + \mathfrak{K}',$$

wenn $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ die Hauptintensitäten vorstellen. Dieser Strahl wird nun je nach den Richtungen seiner Hauptpolarisationsebenen in zwei Componenten (30) zerlegt.

Die eine Componente:

$$\mathfrak{K} \cos^2 \omega + \mathfrak{K}' \sin^2 \omega$$

geht direct über den Resonator hinweg und tritt völlig ungeändert auf der anderen Seite wieder aus; sie liefert also einen in der Richtung (ϑ, φ) vom Resonator ausgehenden geradlinig polarisirten Strahl, dessen Polarisationsebene durch die Axe des Resonators hindurchgeht, und dessen Intensität beträgt:

$$\mathfrak{K} \cos^2 \omega + \mathfrak{K}' \sin^2 \omega = \mathfrak{K}''. \tag{38}$$

Die andere, senkrecht auf der vorigen polarisirte Componente:

$$\mathfrak{K} \sin^2 \omega + \mathfrak{K}' \cos^2 \omega$$

zerfällt wiederum in zwei Teile:

$$(\mathfrak{K} \sin^2 \omega + \mathfrak{K}' \cos^2 \omega) \cos^2 \vartheta$$

und:

$$(\mathfrak{K} \sin^2 \omega + \mathfrak{K}' \cos^2 \omega) \sin^2 \vartheta,$$

von denen der erste ungeändert durch den Resonator hindurchpassirt, der zweite dagegen absorbirt wird. Statt des letzteren erscheint aber in der vom Resonator ausgehenden Strahlung die Intensität des emittirten Strahles (37):

$$\frac{\nu^2 U \sin^2 \vartheta}{c^2}.$$

Diese liefert zusammen mit dem ersten, unverändert gebliebenen Theil die gesammte Intensität des vom Resonator in der Richtung (ϑ, φ) ausgehenden, senkrecht auf (38) polarisirten Strahles:

$$(\mathfrak{K} \sin^2 \omega + \mathfrak{K}' \cos^2 \omega) \cos^2 \vartheta + \frac{\nu^2 U}{c^2} \sin^2 \vartheta = \mathfrak{K}'''. \tag{39}$$

Im ganzen haben wir also schliesslich in der Richtung (ϑ, φ) vom Resonator ausgehend einen aus zwei senkrecht zu einander polarisirten Componenten zusammengesetzten Strahl, dessen eine Polarisationsebene durch die Axe des Resonators geht und dessen Hauptintensitäten die Werte $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{K}'''$ besitzen.

§ 16. Erhaltung der Energie.

Es ist nun leicht, sich Rechenschaft zu geben von der Erhaltung der Gesamtenergie des Systemes auf Grund der localen darin stattfindenden Energieänderungen.

Wenn gar kein Resonator im Felde vorhanden ist, so behält ein jedes der zweifach unendlich vielen elementaren Strahlenbündel beim geradlinigen Fortschreiten mit seiner Intensität auch seine Energie unverändert bei, auch bei der Reflexion an einer als eben und absolut spiegelnd vorausgesetzten Grenzfläche des Feldes.

Jeder Resonator dagegen bewirkt im allgemeinen eine Aenderung der ihn treffenden Strahlenbündel. Berechnen wir die ganze Energieänderung, die der oben betrachtete Resonator in der Zeit dt in dem ihn umgebenden Felde hervorruft. Dabei brauchen wir nur diejenigen monochromatischen Strahlen zu berücksichtigen, welche der Schwingungszahl ν des Resonators entsprechen, da die übrigen durch ihn gar nicht alterirt werden.

In der Richtung (ϑ, φ) wird der Resonator von einem irgendwie polarisirten Strahlenbündel getroffen, dessen Intensität durch die Summe der beiden Hauptintensitäten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ gegeben ist. Dieses Strahlenbündel lässt, der Bedeutung des Ausdruckes (36) gemäss, in der Zeit dt die Energie:

$$(\mathfrak{K} + \mathfrak{K}')\, dt \cdot \frac{3\, c^2\, \sigma}{4\, \pi\, \nu} \cdot d\Omega$$

auf den Resonator fallen, und dadurch wird auf der Seite der ankommenden Strahlen der nämliche Energiebetrag dem Felde entzogen. Auf der anderen Seite geht dafür vom Resonator in derselben Richtung (ϑ, φ) ein in bestimmter Weise polarisirtes Strahlenbündel aus, dessen Intensität durch die Summe der beiden Hauptintensitäten $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{K}'''$ gegeben ist. Dadurch wird dem umgebenden Felde in der Zeit dt der Energiebetrag

$$(\mathfrak{K}'' + \mathfrak{K}''')\, dt \cdot \frac{3\, c^2\, \sigma}{4\, \pi\, \nu}\, d\Omega$$

zugeführt.

Im ganzen beträgt also die in der Zeit dt eingetretene Energieänderung des den Resonator umgebenden Feldes, durch

Subtraction des vorletzten Ausdruckes vom letzten und Integration über $d\Omega$:

$$dt \cdot \frac{3c^2\sigma}{4\pi\nu} \int d\Omega (\mathfrak{K}'' + \mathfrak{K}''' - \mathfrak{K} - \mathfrak{K}').$$

Nimmt man dazu die in derselben Zeit eingetretene Energieänderung des Resonators:

$$dt \cdot \frac{dU}{dt},$$

so verlangt das Princip der Erhaltung der Energie, dass die Summe der letzten beiden Ausdrücke verschwindet, d. h. dass

$$\frac{dU}{dt} + \frac{3c^2\sigma}{4\pi\nu} \int d\Omega (\mathfrak{K}'' + \mathfrak{K}''' - \mathfrak{K} - \mathfrak{K}') = 0, \tag{40}$$

und das ist in der That der Inhalt der beiden Gleichungen (22) und (33), wenn man berücksichtigt, dass nach (38) und (39):

$$\mathfrak{K}'' + \mathfrak{K}''' - \mathfrak{K} - \mathfrak{K}' = \left(\frac{\nu^2 U}{c^2} - \mathfrak{K}\sin^2\omega - \mathfrak{K}'\cos^2\omega\right)\sin^2\vartheta.$$

§ 17. Definition der elektromagnetischen Entropie.

Wir definiren jetzt, analog der für die totale Energie U_t des Systemes aufgestellten Gleichung (26), eine neue Grösse S_t, die ebenfalls durch den augenblicklichen Zustand des Systems bestimmt ist und die wir die *totale elektromagnetische Entropie* des Systemes nennen:

$$S_t = \sum S + \int s\, d\tau.$$

Die Summation Σ ist wieder über alle Resonatoren, die Integration über alle Raumelemente $d\tau$ des durchstrahlten Feldes zu erstrecken. Daher nennen wir S die Entropie eines einzelnen Resonators und s die Entropiedichte in einem Punkte des Feldes.

Die Entropie S eines Resonators mit der Schwingungszahl ν und der Energie U definiren wir folgendermaassen:

$$S = -\frac{U}{a\nu}\log\frac{U}{eb\nu}, \tag{41}$$

wobei a und b zwei universelle positive Constanten bezeichnen, deren Zahlenwerte im absoluten C.G.S.-System im folgenden

Abschnitt (§ 25) auf thermodynamischem Wege ermittelt werden; e, die Basis der natürlichen Logarithmen, ist nur aus äusseren Zweckmässigkeitsgründen hinzugefügt.

Die räumliche Entropiedichte s in einem Punkte $\mathfrak{O}$ des durchstrahlten Feldes bestimmen wir ebenso wie die räumliche Energiedichte u aus der Betrachtung aller Strahlen, die diesen Punkt durchkreuzen. Wir schreiben nämlich jedem Strahlenbündel ausser einer bestimmten Energie auch eine bestimmte Entropie zu, die sich mit dem Bündel zusammen fortpflanzt. Denken wir uns, ganz ebenso wie im § 11, vom Punkte $\mathfrak{O}$ aus in irgend einer Richtung (ϑ, φ) eine kleine geradlinige Strecke r gezogen und sowohl im Anfangspunkt als auch im Endpunkt der Strecke je ein Flächenelement, $d\sigma$ und $d\sigma'$, senkrecht zu r gelegt, so sei der Gesamtbetrag der Entropie, welche in der Zeit dt durch die Fläche $d\sigma$ der Fläche $d\sigma'$ zugestrahlt wird, gleich dem Ausdruck:

$$dt \cdot \frac{d\sigma\, d\sigma'}{r^2} \cdot L, \tag{42}$$

wobei L, die Intensität der Entropiestrahlung in der Richtung (ϑ, φ), auf sogleich näher anzugebende Weise von der Beschaffenheit der Strahlung abhängt.

Wir setzen L, ebenso wie K im § 11, gleich einer Summe, deren Glieder durch die einzelnen monochromatischen in derselben Richtung fortschreitenden Strahlen bedingt werden, und definiren die Intensität der Entropiestrahlung eines monochromatischen geradlinig polarisirten Strahles von der Intensität $\mathfrak{K}$ durch den Ausdruck:

$$-\frac{\mathfrak{K}}{a\nu} \log \frac{c^2 \mathfrak{K}}{e\, b\, \nu^3} = \mathfrak{L}. \tag{43}$$

Der beim Vergleich mit (41) hinter dem Logarithmuszeichen auftretende Factor c^2/ν^2 ist durch die Gleichung (34) bedingt.

In dem allgemeinen Fall, dass der monochromatische Strahl nicht geradlinig polarisirt ist, sondern die Hauptintensitäten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ besitzt, beträgt die Intensität seiner Entropiestrahlung:

$$\mathfrak{L} + \mathfrak{L}',$$

wobei $\mathfrak{L}'$ den Wert bedeutet, den der Ausdruck (43) für $\mathfrak{K}'$ statt $\mathfrak{K}$ annimmt. Daher ist die Gesamtintensität der Entropiestrahlung in der Richtung (ϑ, φ):

$$L = \int_0^\infty d\nu\,(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}')$$

und die räumliche Entropiedichte, analog der Gleichung (27):

$$s = \frac{1}{c}\int L\,.\,d\Omega.$$

Sind speciell alle durch $\mathfrak{O}$ gehenden Strahlen unpolarisirt und ihre Intensität unabhängig von der Richtung, so wird $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}'$,

$$L = 2\int_0^\infty d\nu\,.\,\mathfrak{L} \tag{44}$$

und:

$$s = \frac{4\pi L}{c} = \frac{8\pi}{c}\cdot\int_0^\infty d\nu\,.\,\mathfrak{L}. \tag{45}$$

Die Bedeutung der vorstehenden Definition der elektromagnetischen Entropie beruht darauf, dass mit ihrer Hülfe das Princip der Vermehrung der Entropie für die hier betrachteten Strahlungsvorgänge als gültig nachgewiesen werden kann, und weiter darauf, dass die nämliche Definition, durch eine Identificirung der elektromagnetischen mit der bekannten thermodynamischen Entropie, zu einer thermodynamischen Deutung der elektromagnetischen Strahlungsvorgänge, sowie zu einer Formulirung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik für alle Erscheinungen der Wärmestrahlung führt. Daraus folgen dann unter anderem die Gesetze des stationären Strahlungszustandes, in welchem die Entropie den grössten Wert annimmt, dessen sie nach den gegebenen Bedingungen des Systemes fähig ist.

Der Beweis für die angegebenen Eigenschaften der elektromagnetischen Entropie ist dann geliefert, wenn gezeigt werden kann, dass in allen elektromagnetischen und thermodynamischen Processen die totale Entropie des Systemes zunimmt. Für die hier betrachteten Strahlungsvorgänge, die allerdings noch lange nicht die allgemeinsten sind, wird dieser Nachweis im folgenden Paragraphen geführt und dadurch zugleich auch deren irreversibler Charakter dargethan, während die thermodynamischen Folgerungen erst im letzten Abschnitt Besprechung finden.

Ueber die *Nothwendigkeit* der gegebenen Definition der Entropie vgl. unten § 23.

§ 18. Vermehrung der Entropie.

Wir wollen nun, auf Grund vorstehender Definition, die Aenderung berechnen, welche die totale Entropie S_t unseres Systemes im Zeitelement dt erleidet. Wir halten uns dabei genau an die analoge im § 16 für die Energie des Systemes durchgeführte Rechnung.

Wenn gar kein Resonator im Felde vorhanden ist, so behält ein jedes der zweifach unendlich vielen Strahlenbündel beim geradlinigen Fortschreiten zugleich mit seiner Intensität seine Entropie unverändert bei, auch bei der Reflexion an einer als eben und absolut spiegelnd vorausgesetzten Grenzfläche des Feldes. Durch die Strahlungsvorgänge im freien Felde kann also keine Entropieänderung des Systemes hervorgerufen werden. Dagegen bewirkt jeder Resonator im allgemeinen eine Entropieänderung der ihn treffenden Strahlenbündel. Berechnen wir die ganze Entropieänderung, welche der oben betrachtete Resonator in der Zeit dt in dem ihn umgebenden Felde hervorruft. Dabei brauchen wir nur diejenigen monochromatischen Strahlen zu berücksichtigen, welche der Schwingungszahl ν des Resonators entsprechen, da die übrigen durch ihn gar nicht alterirt werden.

In der Richtung (ϑ, φ) wird der Resonator von einem irgendwie polarisirten Strahlenbündel getroffen, dessen Energiestrahlung die Hauptintensitäten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, und dessen Entropiestrahlung daher die Intensität $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'$ besitzt. Dieses Strahlenbündel lässt, der Bedeutung des Ausdruckes (36) gemäss, in der Zeit dt die Entropie:

$$(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}') \cdot dt \cdot \frac{3\, c^2 \sigma}{4 \pi \nu} \cdot d\,\Omega$$

auf den Resonator fallen, und dadurch wird auf der Seite der ankommenden Strahlen der nämliche Entropiebetrag dem Felde entzogen. Auf der anderen Seite geht vom Resonator in derselben Richtung (ϑ, φ) ein in bestimmter Weise polarisirtes Strahlenbündel aus, dessen Energiestrahlung die Hauptintensitäten $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{K}'''$, und dessen Entropiestrahlung daher die entsprechende Intensität $\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}'''$ besitzt. Dadurch wird dem umgebenden Felde in der Zeit dt die Entropie:

$$(\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}''')\, dt \cdot \frac{3\, c^2 \sigma}{4 \pi \nu} \cdot d\,\Omega$$

zugeführt. Im ganzen beträgt also die in der Zeit dt eingetretene Entropieänderung des den Resonator umgebenden Feldes, durch Subtraction des vorletzten Ausdruckes vom letzten und Integration über $d\Omega$:

$$(46) \qquad dt \cdot \frac{3c^2\sigma}{4\pi\nu} \cdot \int d\Omega (\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}''' - \mathfrak{L} - \mathfrak{L}').$$

Nimmt man dazu nach (41) die in derselben Zeit erfolgte Entropieänderung des Resonators:

$$\frac{dS}{dt} \cdot dt = -\frac{1}{a\nu} \frac{dU}{dt} \cdot \log \frac{U}{b\nu},$$

so ergiebt sich durch Addition zu (46) und Summation über alle Resonatoren die gesuchte Aenderung der totalen Entropie des Systemes:

$$\frac{dS_t}{dt} \cdot dt = dt \cdot \sum \left[\frac{3c^2\sigma}{4\pi\nu} \int d\Omega_e (\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}''' - \mathfrak{L} - \mathfrak{L}') - \frac{1}{a\nu} \frac{dU}{dt} \log \frac{U}{b\nu} \right].$$

Wir wollen nun weiter den Nachweis führen, dass der Ausdruck hinter dem Σ-Zeichen stets positiv ist, inbegriffen den Grenzfall Null.

Zu diesem Zwecke setzen wir für dU/dt den in (40) gegebenen Wert und erhalten dadurch und durch Berücksichtigung der Bedeutung von $\mathfrak{L}$ in (43):

$$\frac{dS_t}{dt} = \sum \frac{3c^2\sigma}{4\pi a\nu^2} \cdot \int d\Omega \left(\mathfrak{K} \log \frac{c^2 \mathfrak{K}}{e\nu^2 U} + \mathfrak{K}' \log \frac{c^2 \mathfrak{K}'}{e\nu^2 U} \right.$$
$$\left. - \mathfrak{K}'' \log \frac{c^2 \mathfrak{K}''}{e\nu^2 U} - \mathfrak{K}''' \log \frac{c^2 \mathfrak{K}'''}{e\nu^2 U} \right).$$

Es erübrigt jetzt noch zu zeigen, dass der eingeklammerte Ausdruck oder, falls man diesen mit der positiven Grösse $c^2/e\nu^2 U$ multiplicirt, dass der Ausdruck:

$$\alpha \log \alpha + \beta \log \beta - \gamma \log \gamma - \delta \log \delta,$$

wobei:

$$\alpha = \frac{c^2 \mathfrak{K}}{e\nu^2 U}, \qquad \gamma = \frac{c^2 \mathfrak{K}''}{e\nu^2 U},$$
$$\beta = \frac{c^2 \mathfrak{K}'}{e\nu^2 U}, \qquad \delta = \frac{c^2 \mathfrak{K}'''}{e\nu^2 U}$$

für alle beliebigen Werte der positiven Grössen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$, U, ϑ, ω, während $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{K}'''$ durch (38) und (39) gegeben sind, positiv ist.

Nun haben wir für δ nach (39):

$$\delta = \frac{c^2}{e\nu^2 U} \left\{ (\mathfrak{K} \sin^2 \omega + \mathfrak{K}' \cos^2 \omega) \cos^2 \vartheta + \frac{\nu^2 U}{c^2} \sin^2 \vartheta \right\}$$

oder nach (38):

$$\delta = \frac{c^2}{e\,\nu^2 U}\left\{(\mathfrak{K} + \mathfrak{K}' - \mathfrak{K}'')\cos^2\vartheta + \frac{\nu^2 U}{c^2}\sin^2\vartheta\right\}$$
$$= (\alpha + \beta - \gamma)\cos^2\vartheta + \frac{\sin^2\vartheta}{e}.$$

Daher liegt δ zwischen dem Werte $1/e$ und dem Werte:

$$\alpha + \beta - \gamma = \delta_0. \tag{47}$$

Da nun für $\delta = 1/e$ die Function $-\delta\log\delta$ ihr absolutes und einziges Maximum annimmt, so liegt $-\delta\log\delta$ zwischen diesem Maximalwert und dem Wert $-\delta_0\log\delta_0$, d. h. es ist:

$$-\delta\log\delta > -\delta_0\log\delta_0$$

oder:

$$\alpha\log\alpha + \beta\log\beta - \gamma\log\gamma - \delta\log\delta$$
$$> \alpha\log\alpha + \beta\log\beta - \gamma\log\gamma - \delta_0\log\delta_0.$$

Um also das positive Vorzeichen des oberen Ausdruckes nachzuweisen, genügt es, dasselbe bei dem unteren Ausdruck zu thun. Setzen wir die Summe:

$$\alpha + \beta = \sigma,$$

so ist nach (47) auch die Summe:

$$\gamma + \delta_0 = \sigma.$$

Der zu untersuchende Ausdruck ist also:

$$[\alpha\log\alpha + (\sigma - \alpha)\log(\sigma - \alpha)] - [\gamma\log\gamma + (\sigma - \gamma)\log(\sigma - \gamma)]. \tag{48}$$

Betrachten wir jetzt das Verhalten der Function von x:

$$x\log x + (\sigma - x)\log(\sigma - x),$$

wo σ constant bleiben möge.

Diese Function erreicht ihr absolutes und einziges Minimum für $x = \sigma/2$, ihr Wert wird also um so kleiner, je näher x dem Werte $\sigma/2$ rückt, einerlei ob $x >$ oder $< \sigma/2$. Nun liegt nach (38) $\mathfrak{K}''$ zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, folglich auch γ zwischen α und β, d. h. zwischen α und $\sigma - \alpha$, und daher liegt γ dem Werte $\sigma/2$, als dem arithmetischen Mittel von α und β, näher als α. Daraus folgt nach dem obigen, dass:

$$\gamma\log\gamma + (\sigma - \gamma)\log(\sigma - \gamma) < \alpha\log\alpha + (\sigma - \alpha)\log(\sigma - \alpha),$$

wodurch das positive Vorzeichen von (48) und somit die Vermehrung der Entropie nachgewiesen ist.

§ 19. Bedingungen des stationären Zustandes.

Derjenige Zustand des Systemes, dem das absolute Maximum der totalen Entropie entspricht, ist als stationärer Zustand zu bezeichnen; denn nach dem Satz der Vermehrung der Entropie ist von ihm aus überhaupt keine Veränderung mehr möglich, solange von aussen keine Einwirkungen auf das System erfolgen. Als notwendige Bedingung für den stationären Zustand ergiebt sich zunächst, dass die totale Entropie sich mit der Zeit nicht mehr ändert, dass also alle Ungleichungen des vorigen Paragraphen sich in Gleichungen verwandeln. Diese Bedingung wird, wie leicht einzusehen ist, erfüllt, wenn für alle Orte und für alle Richtungen:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}' = \mathfrak{K}'' = \mathfrak{K}''' = \frac{\nu^2}{c^2} U. \tag{49}$$

Wir nehmen daher im ganzen Felde alle Strahlen einer jeden Schwingungszahl als unpolarisirt und von gleicher Intensität an.

Aber die für das absolute Maximum der totalen Entropie notwendigen Bedingungen gehen noch weiter. Es muss nämlich für *jede* unendlich kleine virtuelle Zustandsänderung des Systemes die Variation der totalen Entropie S_t verschwinden. Denken wir uns also eine virtuelle Aenderung, die darin besteht, dass eine unendlich kleine Menge Energie von einem Resonator mit der Schwingungszahl ν zu einem anderen Resonator mit der Schwingungszahl ν_1 übergeht, während sonst alles unverändert bleibt, so muss sein:

$$\delta S_t = \delta S + \delta S_1 = 0,$$

wenn S und S_1 die Entropien der beiden Resonatoren bezeichnen. Dabei ist nach dem Energieprincip:

$$\delta U + \delta U_1 = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen liefert nach (41):

$$-\frac{1}{a\nu}\log\frac{U}{b\nu}\cdot\delta U - \frac{1}{a\nu_1}\log\frac{U_1}{b\nu_1}\cdot\delta U_1 = 0.$$

Folglich nach der zweiten Gleichung:

$$-\frac{1}{a\nu}\log\frac{U}{b\nu} = -\frac{1}{a\nu_1}\log\frac{U_1}{b\nu_1}.$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$-\frac{1}{a\nu}\log\frac{U}{b\nu} = \frac{1}{\vartheta}, \tag{50}$$

so folgt aus der letzten Gleichung, da ν_1 ganz beliebig ist, dass der Wert von ϑ im stationären Zustand für sämmtliche im System vorhandene Resonatoren der nämliche sein muss. Da nun durch den Wert von U nach (49) auch der Wert der entsprechenden Energiestrahlung $\mathfrak{K}$ im stationären Zustand gegeben ist, so hängt der stationäre Zustand des ganzen Systemes in allen seinen Teilen nur von einem einzigen Parameter ϑ ab.

Wir wollen nun die Werte aller hier in Betracht kommenden Grössen im stationären Zustand durch diesen Parameter ϑ ausdrücken. Zunächst folgt aus (50) für die Energie eines Resonators mit der Schwingungszahl ν:

$$U = b\,\nu\,e^{-\frac{a\nu}{\vartheta}},$$

sodann aus (49) für die Intensität eines monochromatischen geradlinig polarisirten Strahles von der Schwingungszahl ν:

$$\mathfrak{K} = \frac{b\,\nu^3}{c^2}\,e^{-\frac{a\nu}{\vartheta}}, \tag{51}$$

ferner aus (25) für die Intensität der gesammten Energiestrahlung in irgend einer Richtung:

$$K = 2\int_0^\infty \mathfrak{K}\,d\nu = \frac{12\,b\,\vartheta^4}{c^2\,a^4} \tag{52}$$

und aus (28) für die räumliche Energiedichte des Feldes:

$$u = \frac{4\pi K}{c} = \frac{48\,\pi\,b\,\vartheta^4}{c^3\,a^4}. \tag{53}$$

Diese Energiedichte setzt sich aus den Energiedichten $\mathfrak{u}$ der einzelnen Schwingungszahlen in folgender Weise zusammen:

$$u = \int_0^\infty \mathfrak{u}\,d\nu,$$

$$\mathfrak{u} = \frac{8\,\pi\,\mathfrak{K}}{c} = \frac{8\,\pi\,b\,\nu^3}{c^3}\,e^{-\frac{a\nu}{\vartheta}}.$$

Dagegen ist die Entropie eines Resonators mit der Schwingungszahl ν nach (41) und (50):

$$S = b\left(\frac{\nu}{\vartheta} + \frac{1}{a}\right)e^{-\frac{a\nu}{\vartheta}},$$

die Intensität der Entropiestrahlung von der Schwingungszahl ν nach irgend einer Richtung gemäss (43) und (51):

$$\mathfrak{L} = \frac{b\nu^2}{c^2}\left(\frac{\nu}{\vartheta} + \frac{1}{a}\right) e^{-\frac{a\nu}{\vartheta}},$$

die Intensität der gesammten Entropiestrahlung nach irgend einer Richtung gemäss (44):

$$L = 2\int_0^\infty \mathfrak{L}\, d\nu = \frac{16\, b\, \vartheta^3}{c^2 a^4},$$

schliesslich die räumliche Dichtigkeit der Entropie des Feldes nach (45):

$$s = \frac{4\pi L}{c} = \frac{64\pi b\, \vartheta^3}{c^3 a^4}, \tag{54}$$

die sich aus den Entropiedichten $\mathfrak{s}$ der einzelnen Schwingungszahlen folgendermaassen zusammensetzt:

$$s = \int_0^\infty \mathfrak{s}\, d\nu,$$

$$\mathfrak{s} = \frac{8\pi\mathfrak{L}}{c} = \frac{8\pi b\nu^2}{c^3}\left(\frac{\nu}{\vartheta} + \frac{1}{a}\right) e^{-\frac{a\nu}{\vartheta}}.$$

Dass bei den hier angegebenen Werten die totale Entropie S_t des Systemes wirklich ihr absolutes Maximum besitzt, kann man leicht aus der Bildung der ersten und zweiten Variation von S_t beweisen.

Dritter Abschnitt.

Thermodynamische Folgerungen.

§ 20. Thermodynamische Entropie der Strahlung.

Sobald man die elektrodynamische Natur der Licht- und Wärmestrahlung anerkennt, gewinnt der im vorigen Abschnitt behandelte stationäre Strahlungszustand eine principielle thermodynamische Bedeutung. Denn nach einem von G. Kirchhoff abgeleiteten und dann namentlich von Hrn. W. Wien[1]) zu wichtigen Schlussfolgerungen benutzten Satze ist die Wärmestrahlung, welche sich in einem rings von gleichmässig tem-

1) W. Wien, Wied. Ann. 52. p. 133. 1894.

perirten Körpern genügender Dicke umschlossenen Vacuum herausbildet, nicht abhängig von der Beschaffenheit der Körper, sondern vollkommen bestimmt durch einen einzigen Parameter: die Temperatur. Die Strahlung ist also die nämliche, wie wenn die umgebenden Körper sich gegen das Vacuum vollkommen „schwarz" verhielten.

Derselbe Satz gilt selbstverständlich auch dann, wenn die Wände des Vacuums absolut spiegeln und wenn die Körper irgendwie im Vacuum eingebettet sind, vorausgesetzt nur, dass aus jedem Spectralbezirk wenigstens an Einer Stelle des Systemes Strahlen in endlichem Betrage emittirt werden. Ist nämlich diese letztere Bedingung nicht erfüllt, so könnte im Vacuum auch ein in gewissem Sinne labiler Strahlungszustand zu Stande kommen, in welchem einzelne Farben ganz fehlen.

Da nun nach dem genannten Satze die Zahl, die Grösse und die Natur der im Vacuum befindlichen emittirenden und absorbirenden Körper für die Beschaffenheit der stationären Strahlung völlig gleichgültig ist, so wird man ohne weiteres zu dem Schlusse gedrängt, *dass auch der in dem vorhergehenden Abschnitt behandelte stationäre Strahlungszustand des Vacuums die Bedingungen der Strahlung des schwarzen Körpers erfüllt, ganz ohne Rücksicht auf die Frage, ob die dort vorausgesetzten elektromagnetischen Resonatoren mit den Centren der Wärmestrahlung in bestimmten wirklichen Körpern eine grössere oder geringere Aehnlichkeit aufweisen.*

Zu demselben Schluss führt eine etwas andere Ueberlegung. Der zweite Hauptsatz der Wärmetheorie verlangt bekanntlich, dass nicht nur der ruhenden, sondern auch der strahlenden Wärme eine bestimmte Entropie zukommt[1]); denn wenn ein Körper Wärme durch Ausstrahlung verliert, so nimmt seine Entropie ab, und es muss nach dem Princip der Vermehrung der Entropie als Compensation anderswo eine Entropiezunahme eintreten, die in dem genannten Fall ihren Sitz nur in der entstandenen Wärmestrahlung haben kann. Wenn nun thermische und elektromagnetische Strahlung identificirt werden, so bleibt nichts übrig, als auch die thermische Strahlungsentropie, die doch durch die Beschaffenheit der Strahlung

1) Vgl. W. Wien, l. c.

selber vollständig bestimmt sein muss, mit der elektromagnetischen vollständig zu identificiren. Indem wir dies thun, gelangen wir wiederum zu der Folgerung, dass der dem absoluten Maximum der Entropie entsprechende stationäre Strahlungszustand zugleich den Gleichgewichtszustand der Wärmestrahlung, also die Strahlung des schwarzen Körpers ergiebt.

Aus der Identificirung der thermodynamischen mit der elektromagnetischen Entropie fliessen nun eine Reihe von Beziehungen zwischen thermischen und elektrischen Grössen, deren wichtigste in den folgenden Paragraphen besprochen werden sollen.

§ 21. Elektromagnetische Definition der Temperatur.

Durch die Entropie eines im thermodynamischen Gleichgewicht befindlichen Systemes ist auch seine Temperatur bestimmt. Denn die absolute Temperatur ist das Verhältnis einer unendlich kleinen, dem System zugeführten Wärmemenge zu der dadurch verursachten Entropieänderung, falls das System während der Zustandsänderung im thermodynamischen Gleichgewicht gehalten wird. Nehmen wir also etwa die Volumeneinheit des von der stationären Strahlung erfüllten Vacuums und halten das Volumen constant und die Strahlung stationär, so ist die Energie des Systemes u, und der Betrag einer dem System zugeführten unendlich kleinen Wärmemenge gleich der Energieänderung, also nach (53):

$$d u = \frac{192 \pi b \vartheta^3}{c^3 a^4} \cdot d \vartheta,$$

ferner die dadurch verursachte Aenderung der Entropie s des Systemes nach (54):

$$d s = \frac{192 \pi b \vartheta^2}{c^3 a^4} \cdot d \vartheta,$$

also die absolute Temperatur gleich dem Verhältnis:

$$d u : d s = \vartheta.$$

Die absolute Temperatur des im stationären Strahlungszustand befindlichen Vacuums ist also nichts anderes als der im § 19 eingeführte rein elektromagnetisch definirte Parameter ϑ, von

welchem alle Eigenschaften dieses Zustandes in der dort schon berechneten Weise abhängen. Daher ist nach (51) die reciproke Temperatur eines geradlinig polarisirten monochromatischen Strahles von der Schwingungszahl ν und der Intensität $\mathfrak{K}$:

$$\frac{1}{\vartheta} = \frac{1}{a\nu} \log \frac{b\nu^3}{c^2 \mathfrak{K}}.$$

Wenn die Bedingungen des stationären Zustandes nicht erfüllt sind, sondern wenn beliebige Strahlungsvorgänge im Vacuum stattfinden, so kann man nicht mehr von der Temperatur eines bestimmten Ortes, ja nicht einmal mehr von der Temperatur der Strahlung in einer bestimmten Richtung reden, sondern man muss jedem einzelnen geradlinig polarisirten monochromatischen Strahl eine besondere Temperatur zuschreiben, welche durch seine Intensität und durch seine Schwingungszahl nach der letzten Gleichung bestimmt ist.[1]) Diese seine Temperatur behält der Strahl beim Fortschreiten zugleich mit seiner Intensität unverändert bei, auch wenn er z. B. durch einen Brennpunkt hindurchgeht, solange, bis er geteilt oder absorbirt wird.

Andererseits besitzt jeder Resonator eine ganz bestimmte, durch (50) gegebene Temperatur. Der stationäre Strahlungszustand kann dann auch dadurch charakterisirt werden, dass alle Resonatoren und alle monochromatischen Strahlen des Systemes die nämliche Temperatur besitzen.

§ 22. Abhängigkeit der Gesammtstrahlung von der Temperatur.

Die Gesammtintensität der Energiestrahlung nach irgend einer Richtung ist gegeben durch den Ausdruck von K in (52), welcher, insofern er der vierten Potenz der Temperatur proportional ist, das bekannte Stefan-Boltzmann'sche Gesetz ausspricht, dessen Gültigkeit auf thermodynamischem Wege von Hrn. L. Boltzmann[2]) begründet wurde und neuerdings durch

1) Die Notwendigkeit einer derartigen Erweiterung des Temperaturbegriffes ist wohl zuerst von Hrn. E. Wiedemann betont worden. Wied. Ann. **34.** p. 448. 1888; vgl. auch W. Wien, l. c. p. 132.

2) L. Boltzmann, Wied. Ann. **22.** p. 291. 1884.

die Untersuchungen der Herren O. Lummer und E. Pringsheim[1]), wenigstens innerhalb des Temperaturintervalls von $\vartheta = 290^0$ bis $\vartheta = 1560^0$, eine merkliche experimentelle Bestätigung erhalten hat.

§ 23. Verteilung der Energie im Normalspectrum.

Das Gesetz, nach welchem sich bei der stationären Strahlung die Gesamtstrahlungsintensität K auf die Strahlungsintensitäten $\mathfrak{K}$ der einzelnen Schwingungszahlen verteilt, ist gegeben durch die Gleichung (51). Da dieses Gesetz gewöhnlich nicht auf Schwingungszahlen ν, sondern auf Wellenlängen λ bezogen wird, so wollen wir auch hier die bezügliche Umformung vornehmen, indem wir mit $E_\lambda \, d\lambda$ die gesamte (unpolarisirte) zwischen den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ gelegene Strahlung in irgend einer Richtung bezeichnen. Dann ist nach (25):

$$K = 2 \int_0^\infty \mathfrak{K} \, d\nu = \int_0^\infty E_\lambda \, d\lambda .$$

Folglich, wenn man im ersten Integral statt ν

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

als Integrationsvariable einführt, da:

$$d\nu = -\frac{c \, d\lambda}{\lambda^2},$$

$$\int_0^\infty E_\lambda \, d\lambda = 2c \int_0^\infty \frac{\mathfrak{K}}{\lambda^2} \, d\lambda,$$

und daraus folgt:

$$E_\lambda = \frac{2c\mathfrak{K}}{\lambda^2},$$

oder nach (51), mit Einführung von λ statt ν:

$$E_\lambda = \frac{2c^2 b}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{ac}{\lambda\vartheta}}. \tag{55}$$

Dies ist genau das von Hrn. W. Wien[2]) aufgestellte Energieverteilungsgesetz, dessen wenigstens angenäherte Gültigkeit gerade in neuerer Zeit durch die fortgesetzten Untersuchungen

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Wied. Ann. **63.** p. 395. 1897.
2) W. Wien, Wied. Ann. **58.** p. 662. 1896.

der Herren F. Paschen[1]), F. Paschen und H. Wanner[2]), O. Lummer und E. Pringsheim[3]) dargethan worden ist.

Hr. Wien hat sein Gesetz auf Grund gewisser Voraussetzungen über die Zahl der in der Volumeneinheit befindlichen Strahlungscentren und über die Geschwindigkeit ihrer Bewegung abgeleitet; in der hier entwickelten Theorie spielen diese Grössen keine Rolle, sondern das Gesetz erscheint als eine notwendige Folge der im § 17 aufgestellten Definition der elektromagnetischen Entropie der Strahlung; die Frage nach der Notwendigkeit des Gesetzes fällt also zusammen mit der Frage nach der Notwendigkeit jener Definition. Ich habe mich wiederholt bemüht, den Ausdruck (41) für die elektromagnetische Entropie eines Resonators, durch welchen dann auch der Ausdruck (43) für die Entropie der Strahlung bedingt ist, so abzuändern bez. zu verallgemeinern, dass er immer noch allen theoretisch wohlbegründeten elektromagnetischen und thermodynamischen Gesetzen Genüge leistet, aber es ist mir dies nicht gelungen. So z. B. könnte man die Entropie eines Resonators statt durch (41) allgemeiner folgendermaassen definiren:

$$S = -\frac{U}{f(\nu)} \cdot \log \frac{U}{\varphi(\nu)},$$

wobei $f(\nu)$ und $\varphi(\nu)$ unbestimmte positive Functionen der Schwingungszahl ν sind. Dann würde zwar bei den im § 18 untersuchten elektromagnetischen Vorgängen das Princip der Vermehrung der Entropie erfüllt, aber man erhielte dann statt (50) als reciproke Temperatur des Resonators den Ausdruck:

$$\frac{1}{\vartheta} = -\frac{1}{f(\nu)} \cdot \log \frac{eU}{\varphi(\nu)},$$

also:

$$U = \frac{\varphi(\nu)}{e} \cdot e^{-\frac{f(\nu)}{\vartheta}}$$

und als Energieverteilungsgesetz aus (49) statt (51):

---

1) F. Paschen, Wied. Ann. **60.** p. 662. 1897; Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 405, p. 893. 1899.

2) F. Paschen u. H. Wanner, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 5. 1899.

3) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. **1.** p. 23, p. 215. 1899. Vgl. ferner H. Beckmann, Inaug.-Diss., Tübingen 1898 und H. Rubens, Wied. Ann. **69.** p. 582. 1899. In den drei letztgenannten Arbeiten werden Abweichungen vom Wien'schen Gesetz gefunden. (Anm. bei d. Corr.)

$$\mathfrak{K} = \frac{\nu^2 \varphi(\nu)}{c^2 e} \cdot e^{-\frac{f(\nu)}{\vartheta}}. \tag{56}$$

Dies ist nun gerade diejenige Form des Energieverteilungsgesetzes, zu welcher Hr. Wien auf Grund der oben erwähnten Voraussetzungen gelangte und von welcher er nachgewiesen hat, dass sie auf Grund zuverlässig begründeter Schlussfolgerungen zu der speciellen von ihm angegebenen Form führt.

Versucht man dagegen irgend eine von (56) abweichende Form des Energieverteilungsgesetzes zu Grunde zu legen und berechnet daraus rückwärts den Ausdruck der Entropie, so trifft man immer auf Widersprüche mit dem im § 18 bewiesenen Satze der Vermehrung der Entropie.

Ich glaube hieraus schliessen zu müssen, dass die im § 17 gegebene Definition der Strahlungsentropie und damit auch das Wien'sche Energievertheilungsgesetz eine notwendige Folge der Anwendung des Principes der Vermehrung der Entropie auf die elektromagnetische Strahlungstheorie ist und dass daher die Grenzen der Gültigkeit dieses Gesetzes, falls solche überhaupt existiren, mit denen des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie zusammenfallen. Natürlich gewinnt eben dadurch die weitere experimentelle Prüfung dieses Gesetzes ein um so grösseres principielles Interesse.

§ 24. Strahlung in einem beliebigen Medium.

Wenn die Resonatoren nicht im Vacuum, sondern in einem beliebigen diathermanen Medium eingebettet sind, so erleiden die oben abgeleiteten Formeln dadurch eine Abänderung, dass statt der Lichtgeschwindigkeit c im Vacuum die im Dielektricum c' auftritt. Demgemäss beträgt in einem solchen Medium die Gesamtstrahlungsintensität eines schwarzen Körpers von der Temperatur ϑ normal zu seiner Oberfläche nach (52):

$$K' = \frac{12\, b\, \vartheta^4}{c'^2\, a^4}$$

oder:

$$K : K' = \frac{1}{c^2} : \frac{1}{c'^2}.$$

D. h. die Strahlungsintensitäten des schwarzen Körpers in zwei verschiedenen diathermanen Medien bei der nämlichen Temperatur verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten, — der bekannte, zuerst von G. Kirchhoff, später von R. Clausius bewiesene Satz.

Hierbei mag noch auf den bekannten Umstand hingewiesen werden, dass ein Körper, der im Vacuum schwarz erscheint, diese Eigenschaft notwendig verliert, wenn er in ein Medium mit einer von c verschiedenen Lichtgeschwindigkeit gebracht wird. Ob also ein Körper schwarz ist oder nicht, hängt nicht allein von seiner eigenen Beschaffenheit ab, sondern auch von der des angrenzenden Mediums. Aus diesem Grunde dürfte es für die Klarheit der Ausdrucksweise in manchen Fällen förderlich sein, in erster Linie nicht von schwarzen „Körpern", sondern von schwarzen „Oberflächen" zu sprechen: das sind solche Oberflächen, an denen keine Reflexion stattfindet. Das Kriterium eines schwarzen „Körpers" ist verwickelter: es gehört dazu notwendig erstens eine schwarze Oberfläche, zweitens aber auch für jede Strahlenart eine gewisse Dicke des Körpers, deren Mindestbetrag durch das Absorptionsvermögen der Substanz für diese Strahlenart bestimmt wird. Durch die Trennung dieser beiden für den Begriff des schwarzen Körpers wesentlichen, voneinander aber ganz unabhängigen Bedingungen wird die Verschiedenheit der physikalischen Vorgänge an der Grenze und derer im Innern schärfer zum Ausdruck gebracht. Denn auch bei den stark absorbirenden und emittirenden Substanzen ist kaum eine andere Auffassung möglich, als dass ihre Strahlung nach aussen nicht von ihrer Oberfläche, sondern aus ihrem Innern stammt, und dass die Oberfläche lediglich die Bedeutung hat, die von innen kommenden Strahlen theils durch Reflexion in das Innere zurückzuwerfen, theils durch Refraction nach aussen austreten zu lassen.[1])

---

1) Diese Auffassung findet sich näher ausgeführt bei folgenden Autoren: E. Lommel, Wied. Ann. **10.** p. 449. 1880; E. Lecher, Wied. Ann. **17.** p. 477. 1882; P. H. Dojes, Verhandelingen der Kon. Akad. van Wetensch. Amsterdam, 1. Sectie 3. Nr. 4. 1896 (Wied. Beibl. **20.** p. 125. 1896); Smoluchowski de Smolan, Journ. de Phys. (3) **5.** p. 488. 1896; W. von Uljanin, Wied. Ann. **62.** p. 528. 1897; F. Kurlbaum, Wied. Ann. **67.** p. 846. 1899.

§ 25. Zahlenwerte.

Die Werte der universellen Constanten a und b lassen sich mit Hülfe der vorliegenden Messungen mit ziemlicher Annäherung berechnen.

Hr. F. Kurlbaum[1]) hat gefunden, dass, wenn man mit S_t die gesamte Energie bezeichnet, die von 1 qcm eines auf t^0 C. befindlichen schwarzen Körpers in 1 Sec. in die Luft gestrahlt wird:

$$S_{100} - S_0 = 0{,}01763 \text{ g-Cal.}$$

Andererseits beträgt nach (52) die gesamte von der Flächeneinheit eines schwarzen Körpers in der Zeiteinheit nach allen Richtungen des Halbraumes ausgestrahlte Energie:

$$\int K \cos\vartheta \, d\Omega = K \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta = \pi K = \frac{12\pi b \vartheta^4}{c^2 a^4}.$$

Folglich, wenn das mechanische Wärmeäquivalent zu $419 \cdot 10^5$ angenommen wird, im absoluten C.G.S.-Maasse:

$$\frac{12\pi b (373^4 - 273^4)}{c^2 a^4} = 0{,}01763 . 419 . 10^5$$

oder, da $c = 3 . 10^{10}$:

$$\frac{b}{a^4} = 1{,}278 . 10^{15}. \tag{57}$$

Ferner ist von Hrn. F. Paschen[2]) als Mittel aus seinen besten Beobachtungen der Wert der Constanten im Exponenten der Wien'schen Formel (55) zu 14455 [$\mu \times$ Celsiusgrad] angegeben worden. Dies ergiebt, bezogen auf Centimeter:

$$a c = 1{,}4455$$

oder:

$$a = 0{,}4818 . 10^{-10} [\text{sec} \times \text{Celsiusgrad}]$$

und daraus nach (57):

$$b = 6{,}885 . 10^{-27} [\text{erg} \times \text{sec}].$$

§ 26. Natürliche Maasseinheiten.

Alle bisher in Gebrauch genommenen physikalischen Maasssysteme, auch das sogenannte absolute C.G.S.-System, verdanken

1) F. Kurlbaum, Wied. Ann. **65.** p. 754. 1898.

2) F. Paschen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 419. 1899.

ihren Ursprung insofern dem Zusammentreffen zufälliger Umstände, als die Wahl der jedem System zu Grunde liegenden Einheiten nicht nach allgemeinen, notwendig für alle Orte und Zeiten bedeutungsvollen Gesichtspunkten, sondern wesentlich mit Rücksicht auf die speciellen Bedürfnisse unserer irdischen Cultur getroffen ist. So sind die Einheiten der Länge und der Zeit aus den gegenwärtigen Dimensionen und der gegenwärtigen Bewegung unseres Planeten hergeleitet worden, ferner die Einheit der Masse und der Temperatur aus der Dichte und den Fundamentalpunkten des Wassers, als derjenigen Flüssigkeit, die an der Erdoberfläche die wichtigste Rolle spielt, genommen bei einem Druck, der der mittleren Beschaffenheit der uns umgebenden Atmosphäre entspricht. An dieser Willkür würde principiell auch nichts Wesentliches geändert werden, wenn etwa zur Längeneinheit die unveränderliche Wellenlänge des Na-Lichtes genommen würde. Denn die Auswahl gerade des Na unter den vielen chemischen Elementen könnte wiederum nur etwa durch sein häufiges Vorkommen auf der Erde oder etwa durch seine für unser Auge glänzende Doppellinie, die keineswegs einzig in ihrer Art dasteht, gerechtfertigt werden. Es wäre daher sehr wohl denkbar, dass zu einer anderen Zeit, unter veränderten äusseren Bedingungen, jedes der bisher in Gebrauch genommenen Maasssysteme seine ursprüngliche natürliche Bedeutung theilweise oder gänzlich verlieren würde.

Dem gegenüber dürfte es nicht ohne Interesse sein zu bemerken, dass mit Zuhülfenahme der beiden in dem Ausdruck (41) der Strahlungsentropie auftretenden Constanten a und b die Möglichkeit gegeben ist, Einheiten für Länge, Masse, Zeit und Temperatur aufzustellen, welche, unabhängig von speciellen Körpern oder Substanzen, ihre Bedeutung für alle Zeiten und für alle, auch ausserirdische und aussermenschliche Culturen notwendig behalten und welche daher als „natürliche Maasseinheiten“ bezeichnet werden können.

Die Mittel zur Festsetzung der vier Einheiten für Länge, Masse, Zeit und Temperatur werden gegeben durch die beiden erwähnten Constanten a und b, ferner durch die Grösse der Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeit c im Vacuum und durch die der Gravitationsconstante f. Bezogen auf Centimeter,

Gramm, Secunde und Celsiusgrad sind die Zahlenwerte dieser vier Constanten die folgenden:

$$a = 0{,}4818 . 10^{-10} [\text{sec} \times \text{Celsiusgrad}],$$

$$b = 6{,}885 . 10^{-27} \left[\frac{\text{cm}^2\,\text{g}}{\text{sec}}\right],$$

$$c = 3{,}00 . 10^{10} \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right],$$

$$f = 6{,}685 . 10^{-8} \left[\frac{\text{cm}^3}{\text{g sec}^2}\right].$$ [1])

Wählt man nun die „natürlichen Einheiten" so, dass in dem neuen Maasssystem jede der vorstehenden vier Constanten den Wert 1 annimmt, so erhält man als Einheit der Länge die Grösse:

$$\sqrt{\frac{b\,f}{c^3}} = 4{,}13 . 10^{-33}\ \text{cm},$$

als Einheit der Masse:

$$\sqrt{\frac{b\,c}{f}} = 5{,}56 . 10^{-5}\ \text{g},$$

als Einheit der Zeit:

$$\sqrt{\frac{b\,f}{c^5}} = 1{,}38 . 10^{-43}\ \text{sec},$$

als Einheit der Temperatur:

$$a\sqrt{\frac{c^5}{b\,f}} = 3{,}50 . 10^{32}\ ^\circ\ \text{C}.$$

Diese Grössen behalten ihre natürliche Bedeutung solange bei, als die Gesetze der Gravitation, der Lichtfortpflanzung im Vacuum und die beiden Hauptsätze der Wärmetheorie in Gültigkeit bleiben, sie müssen also, von den verschiedensten Intelligenzen nach den verschiedensten Methoden gemessen, sich immer wieder als die nämlichen ergeben.

---

1) F. Richarz u. O. Krigar-Menzel, Anhang zu den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin **107.** p. 110. 1898; im Auszug: Wied. Ann. **66.** p. 190. 1898.

(Eingegangen 7. November 1899.)